Аффинные системы канонического вида. Для аффинной системы

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $A(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))^T$, $B(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))^T$, $a_i(x), b_i(x) \in C^\infty(\Omega)$, Ω открытое множество в $\mathbb{R}^n$, важно то, что после любой гладкой невырожденной замены переменных $z = \Psi(x)$, $x \in \Omega$ снова получается аффинная система. Действительно, согласно правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\dot{z} = \Psi'(x)\dot{x} = \Psi'(x)(A(x) + B(x)u) = \Psi'(x)A(x) + (\Psi'(x)B(x))u,$$

где $\Psi'(x)$ — матрица Якоби. Следовательно, в новых переменных

$$\dot{z} = C(z) + D(z)u, \tag{2}$$

где

$$C(z) = \Psi'(x)A(x)|_{x=\Psi^{-1}(z)}, \qquad D(z) = \Psi'(x)B(x)|_{x=\Psi^{-1}(z)}, \qquad z \in Z = \Psi(\Omega).$$

Если аффинная система имеет вид

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \ldots, \quad \dot{z}_{n-1} = z_n, \quad \dot{z}_n = f(z) + g(z)u, \tag{3}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in Z \subset \mathbb{R}^n$, $f(z), g(z) \in C^\infty(Z)$, то ее называют *системой канонического вида*, а переменные z — *каноническими переменными*.

Систему канонического вида со скалярным управлением можно записать в виде одного уравнения. Для этого введем *фазовые переменные* y, $\dot{y}$,..., $y^{(n-1)}$, полагая

$$y = z_1, \quad \dot{y} = z_2, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)} = z_n,$$

и вместо системы (3) получим уравнение

$$y^{(n)} = f(\overline{y}) + g(\overline{y})u, \quad \overline{y} = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})^T, \tag{4}$$

которое наряду с (3) тоже будем называть системой канонического вида.

В системе (4) $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$, но $\mathbb{R}^n$ в этом случае далее будем обозначать $\mathbf{F}^n$, $\mathbf{F}^n = \{\overline{y}\}$, и называть *фазовым пространством* системы (4) канонического вида.

Систему канонического вида называют *регулярной* на некотором множестве, если в точках этого множества коэффициент при управлении не обращается в ноль.

Первая основная теорема. Напомним, что аффинной системе (1) взаимно однозначно соответствуют векторные поля

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{5}$$

на Ω с координатными столбцами $A(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))^T$ и $B(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))^T$. С помощью этих векторных полей можно сформулировать необходимое и достаточное условия эквивалентности аффинной системы (1) системе канонического вида, т.е. условия существования для аффинной системы (1) замены переменных, преобразующих ее к каноническому виду.

Теорема 1. Для того, чтобы для аффинной системы (1) в Ω существовали переменные, в которых она имеет канонический вид (3) необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $\phi(x) \in C^\infty(\Omega)$, которая в Ω является решением системы уравнений в частных производных

$$\mathbf{B}\mathbf{A}^k\phi(x) = 0, \quad k = \overline{0, n-2}, \tag{6}$$

а соотношения

$$z_i = \mathbf{A}^{i-1}\phi(x), \quad i = \overline{1,n}, \tag{7}$$

задавали в Ω гладкую невырожденную замену переменных $z = \Phi(x)$. В этих переменных аффинная система имеет канонический вид (3), причем

$$f(z) = \mathbf{A}^n\phi(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}, \quad g(z) = \mathbf{B}\mathbf{A}^{n-1}\phi(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}, \tag{8}$$

где $x = \Phi^{-1}(z)$ обратная к (7) замена переменных.

При доказательстве теоремы мы воспользуемся следующим замечанием.

Если функция $\psi(x) \in C^\infty(\Omega)$, то ее производная в силу аффинной системы (1), как системы обыкновенных дифференциальных уравнений, равна

$$\frac{d\psi(x)}{dt}\bigg|_{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}\ \frac{dx_i}{dt}\bigg|_{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i}(a_i(x) + ub_i(x)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} + u\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} = \mathbf{A}\psi(x) + u\mathbf{B}\psi(x).$$

◀*Необходимость.* Предположим, что для аффинной системы (1) в Ω существуют канонические переменные z, в которых она имеет канонический вид (3) и рассмотрим соответствующую замену переменных $z_i = \phi_i(x), \quad i = \overline{1,n}$.

Прежде всего докажем, что эта замена переменных, преобразующая аффинную систему к каноническому виду, полностью определяется функцией $\phi_1(x)$. Действительно, $z_1 = \phi_1(x)$. Дифференцируя это равенство в силу аффинной системы, имеем

$$\dot z_1 = \frac{d\phi_1(x)}{dt}\bigg|_{(1)},$$

и так как $\dot z_1 = z_2 = \phi_2(x)$, то

$$\phi_2(x) = \frac{d\phi_1(x)}{dt}\bigg|_{(1)}.$$

Аналогично доказываются равенства

$$\phi_k(x) = z_k = \dot z_{k-1} = \frac{d^{k-1}\phi_1(x)}{dt^{k-1}}\bigg|_{(1)}, \quad k = \overline{2,n},$$

т.е. функции $\phi_k(x)$ при $k > 1$ выражаются через производные функции $\phi_1(x)$ в силу аффинной системы (1).

Далее, расписывая производные в силу аффинной системы согласно замечанию находим

$$\phi_2(x) = \frac{d\phi_1(x)}{dt}\bigg|_{(1)} = \mathbf{A}\phi_1(x) + u\mathbf{B}\phi_1(x).$$

Так как функции $\phi_i(x)$ и, в частности $\phi_2(x)$, не зависят от переменного u (управления), из последнего равенства следует, что в Ω

$$\mathbf{B}\phi_1(x) = 0, \quad z_2 = \mathbf{A}\phi_1(x).$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\phi_3(x) = z_3 = \dot z_2 = \tfrac{d\mathbf{A}\phi_1(x)}{dt}\Big|_{(1)} &= \mathbf{A}(\mathbf{A}\phi_1(x)) + u\mathbf{B}(\mathbf{A}\phi_1(x)) = \\ &= \mathbf{A}^2\phi_1(x) + u\mathbf{B}\mathbf{A}\phi_1(x),\end{aligned}$$

и так как функция $\phi_3(x)$ не зависит от управления, то в Ω

$$\mathbf{BA}\phi_1(x) = 0, \quad \phi_3(x) = z_3 = \mathbf{A}^2\phi_1(x).$$

Таким же образом получаем соответствующие выражения для остальных функций $\phi_i(x)$ и в итоге в Ω имеем

$$\mathbf{BA}^k\phi_1(x) = 0, \quad k = \overline{0, n-2}, \quad \phi_i(x) = z_i = \mathbf{A}^{i-1}\phi_1(x), \quad i = \overline{1, n}.$$

Обозначая в этих равенствах $\phi_1(x)$ через $\phi(x)$, получаем условия (6) – (7) теоремы, что завершает доказательство их необходимости.

Достаточность. Пусть функция $\phi(x)$, удовлетворяющая первому условию (6) теоремы, существует. Докажем, что переменные z_i, $i = \overline{1, n}$, из (7) являются каноническими и что в этих переменных аффинная система имеет канонический вид (3), (8). Для этого запишем аффинную систему в новых переменных.

Из соотношений (6)–(7) согласно замечанию при $i = \overline{1, n-1}$ следует, что

$$\dot{z}_i = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{i-1}\phi(x)) + u\mathbf{B}(\mathbf{A}^{i-1}\phi(x)) = \mathbf{A}^i\phi(x) = z_{i+1}.$$

Дифференцируя $z_n = \mathbf{A}^{n-1}\phi(x)$ в силу аффинной системы (1) находим

$$\dot{z}_n = \mathbf{A}^n\phi(x) + u\mathbf{BA}^{n-1}\phi(x). \tag{9}$$

Так как существует $x = \Phi^{-1}(z)$, то $\dot{z}_n = f(z) + g(z)u$, где

$$f(z) = \mathbf{A}^n\phi(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}, \quad g(z) = \mathbf{BA}^{n-1}\phi(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}. \quad \blacktriangleright$$

Воспользуемся теоремой для нахождения канонического вида аффинной системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + 3x_1x_2^3 - 6x_2^2u,\\ \dot{x}_2 &= -x_1x_2 + 2u.\end{aligned}$$

Это двумерная система, а в двумерном случае система (6) содержит единственное уравнение $\mathbf{B}\phi(x) = 0$. Следовательно, функция $\phi(x)$ должна быть решением линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка

$$-6x_2^2\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + 2\frac{\partial\phi}{\partial x_2} = 0.$$

Для нахождения всех решений этого уравнения запишем уравнение его характеристик

$$\frac{dx_1}{-6x_2^2} = \frac{dx_2}{2},$$

откуда $dx_1 = -3x_2^2dx_2$ и, следовательно, $x_1 = -x_2^3 +$. Положив $\phi = x_1 + x_2^3$, получим одно из решений уравнения в частных производных в классе гладких функций.

Учитывая, что $\phi = (1, 3x_2^2) \neq 0$ в $\mathbb{R}^2$, общее решение этого уравнения в множестве гладких функций имеет вид $\alpha(x_1 + x_2^3)$, где $\alpha(.)$ — произвольная гладкая функция одного переменного.

Запишем соотношения (7), соответствующие решению $\phi = x_1 + x_2^3$. Положим $z_1 = \phi = x_1 + x_2^3$ и дифференцируя z_1 в силу рассматриваемой системы получим

$$z_2 = \dot{z}_1 = \dot{x}_1 + 3x_2^2\dot{x}_2 = x_2 + 3x_1x_2^3 - 6x_2^2u + 3x_2^2(-x_1x_2 + 2u) = x_2.$$

Соотношения
$$z_1 = x_1 + x_2^3, \qquad z_2 = x_2 \tag{10}$$
являются гладкой невырожденной заменой переменных в $\mathbb{R}^2$. Действительно, (10) как систему уравнений относительно x_1, x_2 можно разрешить при всех значениях z_1, z_2,
$$x_1 = z_1 - z_2^3, \qquad x_2 = z_2. \tag{11}$$
Правые части равенств в последних двух системах (10)–(11) являются гладкими функциями, определенными при всех x_1, x_2 и, соответственно, z_1, z_2. Поэтому соответствующее отображение $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\Phi(x_1, x_2) = (z_1, z_2)^T$ определено во всем $\mathbb{R}^2$ и взаимно однозначно отображает $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^2$, так как обратное отображение $\Phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\Phi^{-1}(z_1, z_2) = (x_1, x_2)^T$ существует и определено при всех значениях z_1, z_2.

Следовательно, рассматриваемая аффинная система эквивалентна в $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2)^T\}$ системе канонического вида, определенной тоже в $\mathbb{R}^2 = \{(z_1, z_2)^T\}$. Для нахождения этой системы продифференцируем z_2 в силу исходной аффинной системы и исключим старые переменные x_1, x_2 с помощью соотношений (11):
$$\dot z_2 = \dot x_2 = -x_1 x_2 + u = -(z_1 - z_2^3) z_2 + u.$$
Теперь можно записать эквивалентную систему канонического вида в переменных пространства состояний
$$\dot z_1 = z_2, \qquad \dot z_2 = -(z_1 - z_2^3) z_2 + u$$
и в переменных фазового пространства
$$y^{(2)} + (y - (\dot y)^3)\dot y = u.$$

Для нахождения канонического вида аффинных систем третьего и более высокого порядка теорему использовать сложно. Дело в том, что система уравнений (6) для аффинной системы n–го порядка содержит уравнения в частных производных первого, второго, ..., $(n-1)$-го порядков. Для нахождения же функции $\phi(x)$ приходится решать эту систему уравнений в частных производных высокого порядка. Однако оказывается, что система (6) эквивалентна системе уравнений в частных производных первого порядка.

Теорема 2. Для того, чтобы для аффинной системы (1) в Ω существовали переменные, в которых она имеет канонический вид (3) необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $\phi(x) \in C^\infty(\Omega)$, которая в Ω является решением системы уравнений в частных производных
$$\mathrm{ad}^k_{\mathbf{A}} \mathbf{B} \phi(x) = 0, \quad k = \overline{0, n-2}, \tag{12}$$
а соотношения (7)
$$z_i = \mathbf{A}^{i-1}\phi(x), \quad i = \overline{1, n},$$
задавали в Ω гладкую невырожденную замену переменных $z = \Phi(x)$. В этих переменных аффинная система имеет канонический вид (3), причем выполнены соотношения (8)
$$f(z) = \mathbf{A}^n \phi(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}, \qquad g(z) = \mathbf{B}\mathbf{A}^{n-1}\phi(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)},$$
где $x = \Phi^{-1}(z)$ обратная замена переменных.

Сформулируем эту теорему, используя фазовые переменные.

Теорема 3. Для того, чтобы для аффинной системы (1) в Ω существовали фазовые переменные, в которых она имеет канонический вид (4) необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $\phi(x) \in C^\infty(\Omega)$, которая в Ω является решением системы уравнений в частных производных (12)

$$\mathrm{ad}^k_{\mathbf{A}}\mathbf{B}\phi(x) = 0, \quad k = \overline{0, n-2},$$

а соотношения

$$y^{(i)} = \mathbf{A}^i\phi(x), \quad i = \overline{0, n-1}, \tag{13}$$

задавали в Ω гладкую невырожденную замену переменных $\overline{y} = \Phi(x)$. В этих переменных аффинная система (1) имеет вид (4), причем

$$f(\overline{y}) = \mathbf{A}^n\phi(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(\overline{y})}, \qquad g(\overline{y}) = \mathbf{B}\mathbf{A}^{n-1}\phi(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(\overline{y})}, \tag{14}$$

где $\overline{y} = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})^T$, $x = \Phi^{-1}(\overline{y})$ обратная к (13) замена переменных.

Доказательство теорем , следует из утверждения первой основной теоремы и следующей леммы.

Теорема 4. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ гладкие векторные поля на открытом множестве $Q \subset \mathbb{R}^k$. Для того, чтобы функция $\phi(x) \in C^\infty(Q)$ была решением системы уравнений

$$\mathbf{B}\mathbf{A}^k\phi(x) = 0, \quad k = \overline{0, p}, \quad x \in Q \tag{15}$$

необходимо и достаточно, чтобы она была решением системы уравнений

$$\mathrm{ad}^k_{\mathbf{A}}\mathbf{B}\phi(x) = 0, \quad k = \overline{0, p}, \quad x \in Q. \tag{16}$$

Фактически лемма утверждает что указанные системы уравнений в $C^\infty(Q)$ имеют одно множество решений.

◀Доказательство леммы проведем методом математической индукции по p.

При $p = 0$ эти системы содержат по одному уравнению (при $k = 0$), которые совпадают. Следовательно, при $p = 0$ системы имеют одно и то же множество решений.

Предположим, что утверждение леммы справедливо при $p = r - 1 \geq 0$ и докажем его для $p = r$.

Рассмотрим систему (16) при $p = r$. Она содержит $r + 1$ уравнений, первые r из которых образуют подсистему того же вида при $p = r - 1$. По предположению, эту подсистему можно заменить системой (15) при $p = r - 1$. Сделав это, вместо системы (16) получаем эквивалентную в $C^{+\infty}(Q)$ систему

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}\mathbf{A}^k\phi(x) = 0, \quad k = \overline{0, r-1}, \\ &\mathrm{ad}^r_{\mathbf{A}}\mathbf{B}\phi(x) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Преобразуем левую часть последнего уравнения этой системы, воспользовавшись равенством

$$\mathrm{ad}^r_{\mathbf{A}}\mathbf{B}\psi(x) = (-1)^r\sum_{s=0}^{r}(-1)^s C^s_r \mathbf{A}^s\mathbf{B}\mathbf{A}^{r-s}\psi(x),$$

справедливым для произвольной функции $\psi(x) \in C^\infty(Q)$ и тем, что $\mathbf{B}\mathbf{A}^k\phi(x) = 0$ при $k = \overline{0, r-1}$ согласно первым r уравнениям системы (17):

$$\mathrm{ad}^r_{\mathbf{A}}\mathbf{B}\phi(x) = (-1)^r\sum_{s=0}^{r}(-1)^s C^s_r \mathbf{A}^s\mathbf{B}\mathbf{A}^{r-s}\phi(x) = (-1)^r\mathbf{B}\mathbf{A}^r\phi(x).$$

Следовательно, для любого решения $\phi(x) \in C^\infty(Q)$ первых r уравнений системы (17)

$$\mathrm{ad}^r_{\mathbf{A}}\mathbf{B}\phi(x) = 0$$

в Q тогда и только тогда, когда в Q

$$\mathbf{B}\mathbf{A}^r\phi(x) = 0.$$

Поэтому, если последнее уравнение системы (17) заменить на уравнение $\mathbf{B}\mathbf{A}^r\phi(x) = 0$, то множество ее решений в $C^\infty(Q)$ не изменится и она совпадет с системой (15) при $p = r$. ▶

Рассмотрим трехмерную аффинную систему

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_2 - x_3, \\
\dot{x}_2 &= x_1 + ax_2, \\
\dot{x}_3 &= c + x_3(x_1 - b) + u,
\end{aligned}$$

где a, b, c положительные постоянные параметры. Это *система Рёсслера с управлением.* Она интересна тем, что в случае $u \equiv 0$ при соответствующих значениях параметров ее собственная динамика имеет хаотический характер.

Для рассматриваемой аффинной системы $x = (x_1, x_2, x_3)^T$, $n = 3$, а в трехмерном случае система (12) относительно функции $\phi(x)$ содержит два уравнения

$$\mathbf{B}\phi(x) = 0, \quad \mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\mathbf{B}\phi(x) = 0$$

и необходимо найти векторное поле $\mathrm{ad}_{\mathbf{A}}\mathbf{B} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$. Для этого воспользуемся формулой (**??**) вычисления столбца координат коммутатора. Столбец координат векторного поля $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ обозначим через $B^1(x)$. Учитывая, что столбцы координат векторных полей $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ равны

$$A(x) = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_1 + ax_2 \\ c + x_3(x_1 - b) \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

согласно (**??**) находим

$$B^1(x) = B'(x)A(x) - A'(x)B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ x_3 & 0 & x_1 - b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b - x_1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, функция $\phi(x)$ должна быть решением системы линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + (b - x_1)\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0.$$

Общее решение этой системы уравнений в множестве гладких функций имеет вид $\alpha(x_2)$, где $\alpha(.)$ — произвольная гладкая функция одного переменного. Одним из решений является функция $\phi = \alpha(x_2) = x_2$.

Запишем соотношения (7), соответствующие этому решению. Положим $z_1 = \phi = x_2$ и дважды дифференцируя z_1 в силу рассматриваемой аффинной системы последовательно получим

$$\begin{aligned}
z_2 &= \dot{z}_1 = \dot{x}_2 = x_1 + ax_2, \\
z_3 &= \dot{z}_2 = \dot{x}_1 + a\dot{x}_2 = -x_2 - x_3 + a(x_1 + ax_2).
\end{aligned}$$

Соотношения

$$\begin{aligned}
z_1 &= x_2, \\
z_2 &= x_1 + ax_2, \\
z_3 &= ax_1 + (a^2 - 1)x_2 - x_3
\end{aligned} \tag{18}$$

являются гладкой невырожденной заменой переменных в $\mathbb{R}^3$. Действительно, (18) как систему уравнений относительно x_1, x_2, x_3 можно разрешить при всех значениях $z = (z_1, z_2, z_3)^T$,

$$\begin{aligned} x_1 &= z_2 - az_1, \\ x_2 &= z_1, \\ x_3 &= -z_3 + a(z_2 - az_1) + (a^2 - 1)z_1. \end{aligned} \tag{19}$$

Правые части равенств в последних двух системах (18)–(19) являются гладкими функциями, определенными при всех x и, соответственно, z. Поэтому соответствующее отображение $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x) = z$ определено во всем $\mathbb{R}^3$ и взаимно однозначно отображает $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{R}^3$, так как обратное отображение $\Phi^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi^{-1}(z) = x$ существует и определено при всех значениях z.

Следовательно, рассматриваемая аффинная система эквивалентна в $\mathbb{R}^3 = \{x\}$ системе канонического вида, определенной тоже в $\mathbb{R}^3 = \{z\}$. Для нахождения этой системы продифференцируем z_3 в силу исходной аффинной системы и исключим старые переменные x_1, x_2, x_3 с помощью соотношений (19). В результате получим

$$\dot{z}_3 = a\dot{x}_1 + (a^2 - 1)\dot{x}_2 - \dot{x}_3 = a(-x_2 - x_3) + (a^2 - 1)(x_1 + ax_2) - (c + x_3(x_1 - b) + u) = f(z) - u,$$

где через $f(z)$ обозначены слагаемые, не зависящие от управления u. Теперь можно записать эквивалентную систему канонического вида в переменных пространства состояний

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= f(z) - u \end{aligned}$$

и в переменных фазового пространства

$$y^{(3)} - f(\overline{y}) = -u, \qquad \overline{y} = (y, \dot{y}, y^{(2)})^T.$$

Отметим, что нелинейная система Рёсслера с управлением невырожденной линейной заменой переменных в пространстве состояний приведена к регулярной системе канонического вида.