Некоторые предварительные сведения

Матричной экспонентой квадратной матрицы A называется сумма ряда

$$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Этот ряд сходится для любой квадратной матрицы.

Вспомним основные свойства матричной экспоненты. $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$

1. Если $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B$;
2. $\det e^A = e^{\mathrm{trA}}$; (следствие: $\det e^A \neq 0$)
3. $(e^A)^{-1} = e^{-A}$;
4. $e^{A^T} = \left(e^A\right)^T$;
5. $\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A$;
6. $e^{\lambda E} = e^{\lambda}E$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, E — единичная матрица.

Решение задачи Коши для системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax,\ x(t_0) = x_0, \quad x, x_0 \in \mathbb{R}^n,\ A \in M_n(\mathbb{R}) \tag{1}$$

можно записать в виде

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0.$$

Выясним, какой вид имеет решение задачи Коши для неоднородной системы

$$\dot{x} = Ax + f(t),\ x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Будем искать решение (2) в виде

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}v(t), \tag{3}$$

где $v(t)$ — некоторая функция, $v(t_0) = x_0$. Тогда

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{A(t-t_0)}v(t)\right) = Ae^{A(t-t_0)}v(t) + e^{A(t-t_0)}\dot{v}(t) = Ax(t) + e^{A(t-t_0)}\dot{v}(t)$$

откуда

$$f(t) = e^{A(t-t_0)}\dot{v}(t)$$

или

$$\dot{v}(t) = e^{-A(t-t_0)}f(t).$$

$$v(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \dot{v}(\tau)\,d\tau = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(\tau-t_0)}f(\tau)\,d\tau.$$

Подставляя в (3) , получим

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{A(t-t_0)}\int\limits_{t_0}^{t} e^{-A(\tau-t_0)}f(\tau)\,d\tau = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau.$$

Это и есть решение задачи Коши для неоднородной системы.

Управляемость линейных систем

Система

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R},\ A \in M_n(\mathbb{R}),\ B \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}). \tag{4}$$

называется *управляемой*, если для любого $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $T > 0$ найдётся кусочно-непрерывное $u(t)$, $t \in [0, T]$, такое, что соответствующее решение системы (4) принимает нулевое значение в момент T, $x(T) = 0$.

Система (4) называется *вполне управляемой*, если для любых $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x(T) = x_* \in \mathbb{R}^n$ и $T > 0$ найдётся кусочно-непрерывное $u(t)$, $t \in [0, T]$, такое, что $x(T) = x_*$.

Теорема 1. Для того, чтобы система (4) была управляемой, необходимо и достаточно, чтобы её *матрица управляемости*

$$U = (B \mid AB \mid A^2B\ \ldots\ A^{n-1}B)$$

была невырожденной.

◀ *Достаточность.*

Будем искать требуемое управление в виде $u_*(t) = B^T e^{A^T(T-t)} v$, где v — некоторый столбец, зависящий от x_0. Тогда исходя из условий $x(0) = x_0$, $x(T) = 0$

$$x(T) = 0 = e^{AT}x_0 + \int\limits_0^T e^{A(T-\tau)}Bu^*(\tau)\,d\tau =$$

$$= e^{AT}x_0 + \left(\int\limits_0^T e^{A(T-\tau)}BB^Te^{A^T(T-\tau)}\,d\tau\right) v = e^{AT}x_0 + W(T)\,v.$$

Матрица $W(T) = \int\limits_0^T e^{A(T-\tau)}BB^Te^{A^T(T-\tau)}\,d\tau$ называется *граммианом управляемости*. Если удастся доказать, что $\det W(T) \neq 0$, то при $v = -W^{-1}(T)e^{AT}x_0$ получим искомое управление.

Рассмотрим квадратичную форму

$$z^TW(T)z = z^T\int\limits_0^T e^{A(T-\tau)}BB^Te^{A^T(T-\tau)}\,d\tau z = \int\limits_0^T z^Te^{A(T-\tau)}BB^Te^{A^T(T-\tau)}z\,d\tau =$$

$$= \int\limits_0^T \left(z^Te^{A(T-\tau)}B\right)^2\,d\tau \geqslant 0,\ z \in \mathbb{R}^n.$$

Таким образом, форма $z^TW(T)z$ неотрицательно определена. Докажем, что она положительно определена. Предположим обратное, т.е. $\exists z \neq 0 : z^TW(T)z = 0$. Это возможно только в том случае, если функция $\varphi(\tau) = z^Te^{A(T-\tau)}B$ равна нулю при всех $\tau \in [0; T]$. Тогда

$$\varphi(T) = \varphi'(T) = \ldots = \varphi^{(n-1)}(T) = 0. \tag{5}$$

Но

$$\varphi(T) = z^TB,\ \varphi'(T) = -z^TAe^{A(T-T)}B = -z^TAB,\ \ldots\ \varphi^{(n-1)}(T) = (-1)^{(n-1)}z^TA^{(n-1)}B,$$

поэтому условие (5) можно записать как

$$z^T(B \mid AB \mid A^2B\ \ldots; A^{n-1}B) = z^TU = 0$$

или
$$U^T z = 0.$$
Тогда получается, что СЛАУ с матрицей U^T имеет нулевое решение $\Rightarrow \det U^T = 0 \Rightarrow \det U = 0$, что противоречит условию теоремы.

Итак, управление
$$u_*(t) = -B^T e^{A^T(T-t)} W^{-1}(T) e^{AT} x_0$$
обеспечивает выполнение условия $x(T) = 0$. ▶

Замечание. Конечной точкой в описанной процедуре не обязательно должен быть 0. Условие $x(T) = x_* \in \mathbb{R}^n$ можно выполнить, если выбрать $v = W^{-1}(T)\left(-e^{AT}x_0 + x_*\right)$. Тогда соответствующее терминальное управление
$$u_*(t) = B^T e^{A^T(T-t)} W^{-1}(T)\left(-e^{AT}x_0 + x_*\right).$$

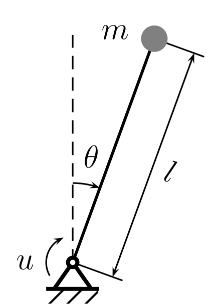
Следствие. Система (4) вполне управляема тогда и только тогда, когда она управляема.

Упражнение. Покажите, что для линейной стационарной системы с векторным управлением
$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ A \in M_n(\mathbb{R}),\ B \in M_{n\times m}(\mathbb{R}),\ m > 1, \tag{6}$$
справедлив аналогичный результат: для того, чтобы система (6) была управляемой, необходимо и достаточно, чтобы её матрица управляемости
$$U = (B \mid AB \mid A^2B\ \ldots\ A^{n-1}B)$$
имела ранг n.

Задача стабилизации. Формула Аккермана

Если нулевое решение системы
$$\dot{x} = f(x, u), \quad f(0,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{7}$$
замкнутой управлением $u = u_*(x)$, (глобально) асимптотически устойчиво, то говорят, что это управление (глобально) *стабилизирует* нулевое решение системы (7). Поскольку у линейных систем все решения одновременно либо устойчивы, либо неустойчивы, о них говорят, что соответствующее управление *стабилизирует систему.* Задача поиска стабилизирующего управления называется *задачей стабилизации.*

Пример 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение перевёрнутого маятника:
$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -\dfrac{\mu}{ml^2}\omega + \dfrac{g}{l}\sin\theta + \dfrac{1}{ml^2}u. \end{cases}$$



Здесь $\mu > 0$ — коэффициент трения, g — ускорение свободного падения, приложенный к оси момент u играет роль управления. Верхнее положение равновесия маятника при нулевом моменте u неустойчиво. Управление

$$u(\theta) = ml^2\left(-\frac{g}{l}\sin\theta - k\theta\right), \quad k > 0$$

стабилизирует его. Действительно, замкнутая $u(\theta)$ система будет иметь вид

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot\theta & = & \omega \\ \dot\omega & = & -\dfrac{\mu}{ml^2}\omega - k\theta \end{array}\right.$$

или, в виде дифференциального уравнения,

$$\ddot\theta + \frac{\mu}{ml^2}\dot\theta + k\theta = 0.$$

Поскольку характеристическое уравнение $\lambda^2 + \dfrac{\mu}{ml^2}\lambda + k = 0$ имеет положительные коэффициенты, его корни имеют отрицательные вещественные части. Это значит, что все его решения асимптотически устойчивы.

Заметим, что наше управление является глобально стабилизирующим: оно обеспечивает стремление состояния к нулю при любых начальных условиях. #

Рассмотрим линейную стационарную систему с управлением

$$\dot x = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R},\ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}),\ B \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Требуется построить такой закон управления вида $u = -Kx$, $K \in M_{1\times n}$, что замкнутая система $\dot x = (A - BK)x$ будет обладать характеристическим многочленом с заданными коэффициентами k_i, $i = 0, \ldots, n-1$,

$$P(\lambda) = \lambda^n + k_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + k_1\lambda + k_0.$$

В том случае, если матрица управляемости U системы (8) невырождена, эта задача решается с применением *формулы Аккермана*

$$K = (0\ 0\ \ldots\ 1)U^{-1}P(A). \tag{9}$$

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot x_1 & = & x_1 + x_2 + u \\ \dot x_2 & = & x_1 + u. \end{array}\right.$$

Желаемый характеристический многочлен возьмём $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$ с корнями -1 и -2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$P(A) = A^2 + 3A + 2E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$K = (0\ 1)\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ -1)\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = (3\ 1).$$

Итак, $u = -3x_1 - x_2$; замкнутая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &=& -2x_1 \\ \dot{x}_2 &=& -2x_1 + x_2; \end{cases}$$

её матрица $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ имеет характеристические числа -1 и -2.#

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &=& x_1 + x_2 + x_3 + u \\ \dot{x}_2 &=& x_2 - u \\ \dot{x}_3 &=& x_1 + x_2 + u. \end{cases}$$

Желаемый характеристический многочлен возьмём $P(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$ с корнями -1, -2 и -3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P(A) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 35 & 19 \\ 0 & 24 & 0 \\ 19 & 27 & 13 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & 35 & 19 \\ 0 & 24 & 0 \\ 19 & 27 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & -59 & -19 \end{pmatrix}.$$

Итак, $u = 32x_1 + 59x_2 + 19x_3$; матрица замкнутой системы $\begin{pmatrix} 33 & 60 & 20 \\ -32 & -58 & -19 \\ 33 & 60 & 19 \end{pmatrix}$ имеет характеристические числа -1, -2 и -3.#

Метод линеаризации

Рассмотрим нелинейную стационарную систему с управлением

$$\dot{x} = f(x, u), \quad f(0,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m. \tag{10}$$

Систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=0 \\ u=0}}, \ B = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=0 \\ u=0}} \tag{11}$$

будем называть системой (10), *линеаризованной в окрестности нулевого положения равновесия.*

Теорема 2. Если управление вида $u = -Kx$ таково, что матрица $A - BK$, где A и B — коэффициенты линеаризованной системы (11), устойчива, то это же управление локально стабилизирует нулевое решение системы (10).

◀ Система (10), замкнутая управлением $u = -Kx$, имеет вид

$$\dot{x} = f(x, -Kx). \tag{12}$$

Исследуем устойчивость по первому приближению:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x, -Kx)\right) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial(-Kx)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial u}K;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,-Kx)\right)\Big|_{\substack{x=0\\u=0}} = A - BK.$$

Матрица $A-BK$ имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями, значит, по теореме об устойчивости по первому приближению нулевое решение системы (12) асимптотически устойчиво. ▶

Пример 4. Линеаризуем систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 + e^{3x_2} - 1 + \cos x_2 \cdot u \\ \dot{x}_2 &= -x_1 e^{x_2} + \sin x_2 - (1+x_1)u. \end{cases}$$

$$A = \frac{\partial A(x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \begin{pmatrix} 1 & 3e^{3x_2} - \sin x_2 \cdot u \\ -e^{x_2} - u & -x_1 e^{x_2} + \cos x_2 \end{pmatrix}\Big|_{x=0,u=0} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f(x)}{\partial u}\Big|_{x=0,u=0} = \begin{pmatrix} \cos x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}\Big|_{x=0,u=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.\#$$

Пример 5. Построим управление, локально стабилизирующее нулевое состояние равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \sin x_1 + x_2 x_3 + e^{x_2} u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \operatorname{tg} x_2 + x_3^2 + u^2 \\ \dot{x}_3 &= \cos x_1 + x_2 - e^{x_3} - u. \end{cases}$$

$$A = \frac{\partial f(x)}{\partial x}\Big|_{x=0,u=0} = \begin{pmatrix} \cos x_1 & x_3 + e^{x_2} u & x_2 \\ 1 & 1/\cos^2 x_2 & 2x_3 \\ -\sin x_1 & 1 & -e^{x_3} \end{pmatrix}\Bigg|_{x=0,u=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f(x)}{\partial u}\Big|_{x=0,u=0} = \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ 2u \\ -1 \end{pmatrix}\Bigg|_{x=0,u=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Желаемый характеристический многочлен возьмём $P(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6$ с корнями -1, -2 и -3.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

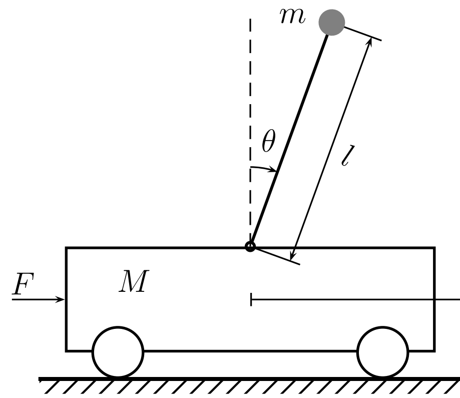
$$P(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 26 & 24 & 0 \\ 7 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 26 & 24 & 0 \\ 7 & 12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, $u = -7x_1 - 12x_2$; матрица замкнутой системы $\begin{pmatrix} -6 & -12 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 7 & 13 & -1 \end{pmatrix}$ имеет характеристические числа -1, -2 и -3.#

Пример 6. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение перевёрнутого маятника на тележке:

$$\begin{cases} \ddot{x} &= \frac{1}{M+m\sin^2\theta}\Big(m\sin\theta(l\dot{\theta}^2 - g\cos\theta) + F\Big) \\ \ddot{\theta} &= \frac{1}{l(M+m\sin^2\theta)}\Big(-ml\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + (M+m)g\sin\theta - F\cos\theta\Big). \end{cases} \tag{13}$$



Это система четвёртого порядка с вектором состояния $\bar{x} = (x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})$. Управление системой осуществляется с помощью силы F, приложенной к тележке. Найдём управление $F(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})$, локально стабилизирующее верхнее положение равновесия маятника.

В результате линеаризации получаем

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{(m+M)g}{lM} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{lM} \end{pmatrix} F = A\bar{x} + BF \tag{14}$$

Матрица управляемости

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{M} & 0 & \dfrac{mg}{M^2 l} \\ \dfrac{1}{M} & 0 & \dfrac{mg}{M^2 l} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{lM} & 0 & -\dfrac{(m+M)g}{M^2 l^2} \\ -\dfrac{1}{lM} & 0 & -\dfrac{(m+M)g}{M^2 l^2} & 0 \end{pmatrix}$$

невырождена,

$$\det U = \frac{g^2}{M^4 l^4}, \qquad U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & M+m & 0 & lm \\ M+m & 0 & lm & 0 \\ 0 & -\dfrac{Ml}{g} & 0 & -\dfrac{Ml^2}{g} \\ -\dfrac{Ml}{g} & 0 & -\dfrac{Ml^2}{g} & 0 \end{pmatrix}.$$

Наблюдаемость линейных систем

Рассмотрим систему без управления с выходом

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^k,\ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}),\ C \in M_{k\times n}(\mathbb{R}). \tag{15}$$

Система (15) называется *наблюдаемой*, если любым двум разным выходам $y_1(t)$ и $y_2(t)$ соответствуют разные решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Наоборот, если существуют два решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ такие, что $x_1(t_0) \neq x_2(t_0)$, но $y_1(t) \equiv y_2(t)$ при $t \geqslant t_0$, то система называется *ненаблюдаемой*.

Теорема 3. Для того, чтобы система (15) была наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы её *матрица наблюдаемости*

$$V = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

имела ранг n.

◀ *Достаточность.*

Имеем

$$y = Cx(t),\ \dot{y} = C\dot{x}(t) = CAx(t),\ \dots,\ y^{(n-1)} = Cx^{(n-1)} = CA^{n-1}x(t),$$

то есть

$$\bar{y} = Vx(t), \tag{16}$$

где $\bar{y} = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})^T$. Система (16) является СЛАУ относительно столбца $x(t)$. Количество элементов её ФСР равно $n - \mathrm{rankV} = \mathrm{n} - \mathrm{n} = 0$. Следовательно, система (16) имеет единственное решение для всех допустимых (т.е. полученных из решений (15)) векторов $\bar{y}$. ▶

Замечание. Для наблюдаемости системы со скалярным выходом необходимо и достаточно, чтобы $\det V \neq 0$.

В реальности вычисление производных от выхода не всегда выполнимо. Можно обойтись без дифференцирования, если построить систему, называемую *наблюдателем*.

Пусть для какого-то решения $x(t)$, $t \geqslant t_0$ системы (15) известна функция выхода $y(t)$, $t \geqslant t_0$. Рассмотрим систему

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + F(y - C\hat{x}), \tag{17}$$

где $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор, который будем называть *оценкой состояния*, F — некоторая матрица, y — выход исходной системы. Начальное состояние $x(t_0)$ исходной системы неизвестно, поэтому будем считать, что в момент t_0 система (17) находится в некотором состоянии $\hat{x}(t_0)$. Разность $e(t) = x - \hat{x}$ между решениями систем (15) и (17) будем называть невязкой или отклонением. Для производной вектора отклонений справедливо равенство

$$\dot{e} = Ax - A\hat{x} - F(y - C\hat{x}) = A(x - \hat{x}) - F(Cx - C\hat{x}) = (A - FC)e.$$

Если удастся так подобрать матрицу F, чтобы собственные числа матрицы $A - FC$ имели отрицательные вещественные части, то невязка при $t \to +\infty$ будет стремиться к нулю, то есть оценка $\hat{x}(t)$ будет стремиться к $x(t)$ при любых начальных условиях $\hat{x}(t_0)$.

Выбрать матрицу F при $k = 1$ можно с помощью формулы Аккермана. Действительно, рассмотрим транспонированную матрицу системы в отклонениях $(A - FC)^T = A^T - C^T F^T$. Матрица F^T в этом выражении играет роль K в формуле (9):

$$F^T = (0\ 0\ \dots\ 1)U^{-1}P(A^T), \quad U = \left(C^T | A^T C^T | \dots | (A^T)^{n-1} C^T\right) = V^T.$$

Выбрав таким образом F, мы получим желаемые собственные числа у матрицы $(A - FC)^T$. Собственные числа матрицы $A - FC$ будут такими же. Действительно,

$$\det((A - FC)^T - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \det(((A - FC)^T - \lambda E)^T) = 0 \Leftrightarrow \det((A - FC) - \lambda E) = 0.$$

Таким образом, если система (15) со скалярным выходом наблюдаема, то всегда можно по её выходу построить оценку её состояния. Аналогичный результат справедлив и для систем с векторным выходом.

Пример 7. Построим наблюдатель (17) для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 \\ y &= x_2. \end{cases}$$

Выберем собственные числа для системы в отклонениях -1 и -2. Воспользуемся формулой Аккермана для $A^T - C^T F^T$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = V^T = U_e$$

$$(V^T)^{-1} = V^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(A^T) = (A^T)^2 + 3A^T + 2E = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$F^T = (0\ 1) \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -6 & 11 \end{pmatrix} = (1\ 0) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -6 & 11 \end{pmatrix} = (5\ 6) \ \Rightarrow \ F = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, искомый наблюдатель имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_1 - \hat{x}_2 + 5(y - \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 + 6(y - \hat{x}_2). \end{cases} \quad \#$$

Рассмотрим теперь систему со скалярным управлением

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ y \in \mathbb{R}^k, \ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), \ B \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}), \ C \in M_{k\times n}(\mathbb{R}). \tag{18}$$

Пусть эта система управляема и наблюдаема, то есть матрицы управляемости и наблюдаемости этих систем невырожены. Построим управление, стабилизирующее нулевое положение равновесия этой системы при условии, что известен не весь вектор состояния, а только выход. Будем искать обратную связь в виде

$$u = -K\hat{x}, \tag{19}$$

а наблюдатель в виде

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + F(y - C\hat{x}). \tag{20}$$

Объединяя (18), (20) и (19) и исключая y получим

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax - BK\hat{x}, \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} - BK\hat{x} + F(Cx - C\hat{x}). \end{cases}$$

Если перейти от $\hat{x}$ к невязке $e = x - \hat{x}$, $\hat{x} = x - e$, можно получить

$$\begin{cases} \dot{x} &= (A - BK)x + BKe, \\ \dot{e} &= (A - FC)e. \end{cases} \tag{21}$$

Систему (21) можно рассматривать как линейную систему с вектором состояния $(x\ e)^T$ и с блочной матрицей

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A - BK & BK \\ \hline 0 & A - FC \end{array} \right).$$

Собственные числа такой матрицы есть собственные числа диагональных матриц $A-BK$ и $A-FC$, которые для управляемых и наблюдаемых систем можно выбрать любыми с помощью формулы Аккермана.

Пример 8. Построим управление, стабилизирующее нулевое состояние равновесия системы из примера 1 по выходу x_2:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u \\ y &= x_2. \end{cases}$$

Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выбрав собственные числа -1 и -2 для $A - BK$, получим (см. пример 1) $K = (3\ 1)$. Получим такие же числа для $A^T - C^T F^T$:

$$A^T = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad U_e = V^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = U_e^{-1}.$$

$$P(A^T) = (P(A))^T = (A^2 + 3A + 2E)^T = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(см. пример 1).

$$F^T = (0\ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 0) \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = (7\ 4) \ \Rightarrow\ F = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, наблюдатель (20) для исходной системы

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_1 + \hat{x}_2 + u + 7(y - \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_1 + u + 4(y - \hat{x}_2), \end{cases}$$

а стабилизирующее управление

$$u = -3\hat{x}_1 - \hat{x}_2. \#$$

Преобразование Лапласа

Преобразованием Лапласа называется отображение $\mathcal{L}(f(t))$, которое ставит в соответствие вещественной функции вещественного аргумента $f(t)$ функцию комплексного аргумента

$$F(s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt. \tag{22}$$

Интеграл (22) сходится при всех s таких, что $\mathrm{Re}\, s > \sigma$, если

1. $f(t)$ при $t \geqslant 0$ определена и кусочно непрерывна;
2. существует такое M, что при $t \geqslant 0$ $|f(t)| \leqslant Me^{\sigma t}$.

Функция комплексного аргумента $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ называется *образом* или *изображением* $f(t)$, а $f(t)$ — *оригиналом* $F(s)$.

Пример 9. Найдём образ функции $f(t) = t$:

$$F(s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-st} t\, dt = \begin{vmatrix} u = t \\ v = -e^{-st}/s \end{vmatrix} = -\frac{te^{-st}}{s}\bigg|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{-e^{-st}}{s}\, dt = 0 - \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{s^2}\, d(-st) =$$

$$= -\left.\frac{e^{-st}}{s^2}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{s^2}. \#$$

Пример 10. Функция $f(t) = e^{t^2}$ не имеет образа, поскольку соответствующий интеграл расходится. #

Преобразование Лапласа обладает свойством линейности:

$$\mathcal{L}(f(t) + g(t)) = \mathcal{L}(f(t)) + \mathcal{L}(g(t)), \quad \mathcal{L}(\lambda f(t)) = \lambda \mathcal{L}(f(t))$$

для всех вещественных λ и таких f и g, что соответствующие интегралы сходятся. Кроме того, если f имеет непрерывную производную и, опять же, сходятся все необходимые интегралы, то

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-st} f'(t)\, dt = \begin{vmatrix} u = e^{-st} \\ dv = f'(t)\, dt \end{vmatrix} = e^{-st} f(t)\big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} f(t)(-s)e^{-st}\, dt =$$

$$= -f(0) + \int\limits_0^{+\infty} f(t) s e^{-st}\, dt = -f(0) + s\mathcal{L}(f(t)).$$

Образ производной n-го порядка можно получить по формуле

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Если ограничиться такими $f(t)$, что $f(0) = 0$, то

$$\mathcal{L}(f) = F(s) \;\Rightarrow\; \mathcal{L}(f') = sF(s).$$

Формула интегрирования оригинала

$$\mathcal{L}\left(\int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}.$$

Передаточные функции

Выражение

$$H(s) = C(sE - A)^{-1} B + D, \quad s \in \mathbb{C} \tag{23}$$

называется *передаточной функцией* системы

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^k \tag{24}$$

от входа u к выходу y.

Также если $u(t)$ — вход линейной системы, $U(s)$ — его образ, $y(t)$ — выход системы, $Y(s)$ — его образ, $x(0)=0$, $t\geqslant 0$, то

$$Y(s)=H(s)U(s), \tag{25}$$

где $H(s)$ — передаточная функция системы. Действительно, (обозначим $\mathcal{L}(x(t))=X(s)$)

$$sX(s)=AX(s)+BU(s)\ \Rightarrow\ (sE-A)X(s)=BU(s)\ \Rightarrow\ X(s)=(sE-A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s)=CX(s)+DU(s)=C(sE-A)^{-1}BU(s)+DU(s)=$$
$$=(C(sE-A)^{-1}B+D)U(s)=H(s)U(s).$$

Системы (24), у которых $m=k=1$, называют SISO (Single Input Single Output) системами. Для SISO-систем передаточную функцию можно определить как отношение образа выхода системы к образу входа:

$$H(s)=\frac{\mathcal{L}(y(t))}{\mathcal{L}(u(t))}$$

Пример 11. Рассмотрим систему-интегратор

$$\begin{cases} \dot{x}=u\\ y=x.\end{cases}$$

Здесь $A=0$, $B=1$, $C=1$, $D=0$ и $H(s)=1\cdot(s\cdot 1-0)^{-1}\cdot 1+0=1/s$. #

Пример 12. Передаточная функция дифференциатора $y=\dot{u}$ есть $H(s)=s$. Заметим, что дифференциатор не может быть описан системой (24), но его передаточную функцию можно определить через преобразование Лапласа:

$$\mathcal{L}(y(t))=\mathcal{L}(\dot{u})=s\mathcal{L}(u(t)).\#$$

Пример 13. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &=& 2x_1-3x_2-u\\ \dot{x}_2 &=& x_1-x_2+u\\ y &=& x_1-x_2.\end{cases}$$

Определим её передаточную функцию двумя способами. С одной стороны, имеем

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1\\ 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & -1\end{pmatrix},\quad D=0.$$

$$sE-A=\begin{pmatrix} s-2 & 3\\ -1 & s+1\end{pmatrix},\ \det(sE-A)=s^2-s+1,\ (sE-A)^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{s+1}{s^2-s+1} & \dfrac{-3}{s^2-s+1}\\ \dfrac{1}{s^2-s+1} & \dfrac{s-2}{s^2-s+1}\end{pmatrix};$$

$$H(s)=\begin{pmatrix} 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{s+1}{s^2-s+1} & \dfrac{-3}{s^2-s+1}\\ \dfrac{1}{s^2-s+1} & \dfrac{s-2}{s^2-s+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{-s-4}{s^2-s+1}\\ \dfrac{s-3}{s^2-s+1}\end{pmatrix}=\frac{-2s-1}{s^2-s+1}.$$

С другой стороны, можно применить преобразование Лапласа ко всем трём уравнениям системы:

$$\begin{cases} s\mathcal{L}(x_1) &=& 2\mathcal{L}(x_1)-3\mathcal{L}(x_2)-\mathcal{L}(u)\\ s\mathcal{L}(x_2) &=& \mathcal{L}(x_1)-\mathcal{L}(x_2)+\mathcal{L}(u)\\ \mathcal{L}(y) &=& \mathcal{L}(x_1)-\mathcal{L}(x_2).\end{cases}$$

Выразим из второго уравнения $\mathcal{L}(x_2)$:

$$\mathcal{L}(x_2) = \frac{\mathcal{L}(x_1) - \mathcal{L}(x_2) + \mathcal{L}(u)}{s} = \frac{\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(u)}{s}$$

Тогда

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(x_1) - \mathcal{L}(x_2) = \frac{s\mathcal{L}(x_1) - s\mathcal{L}(x_2)}{s} = \frac{\mathcal{L}(x_1) - 2\mathcal{L}(x_2) - 2\mathcal{L}(u)}{s} =$$

$$= \frac{\mathcal{L}(x_1) - \mathcal{L}(x_2) - \mathcal{L}(x_2) - 2\mathcal{L}(u)}{s} = \frac{\mathcal{L}(y) - \dfrac{\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(u)}{s} - 2\mathcal{L}(u)}{s} = \frac{(s-1)\mathcal{L}(y) + (-1-2s)\mathcal{L}(u)}{s^2}$$

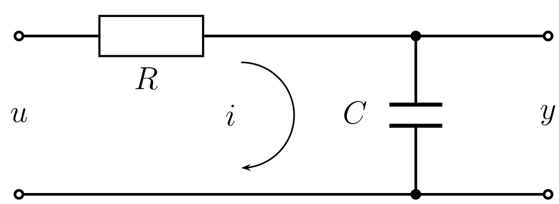
Таким образом

$$s^2\mathcal{L}(y) = (s-1)\mathcal{L}(y) + (-1-2s)\mathcal{L}(u)$$

или

$$(s^2 - s + 1)\mathcal{L}(y) = (-1-2s)\mathcal{L}(u).\#$$

Пример 14. Рассмотрим интегрирующую RC-цепь



Выясним, как напряжение на выходе y будет зависеть от напряжения на входе u:

$$u = iR + y; \quad i = C\frac{dy}{dt} \;\Rightarrow\; y + RC\frac{dy}{dt} = u.$$

Переходя к изображениям $Y(s)$ и $U(s)$, получим

$$Y(s) + RCsY(s) = U(s) \;\Rightarrow\; Y(s) = \frac{U(s)}{1 + RCs};$$

таким образом, передаточная функция этой системы $H(s) = \dfrac{1}{1 + RCs}$. #

Пример 15. Получим передаточную функцию двигателя постоянного тока. Будем рассматривать двигатель как динамичскую систему, вход которой — напряжение на обмотке, выход — угловая скорость вращения ротора. Математическая модель двигателя имеет вид

$$iR + L\frac{di}{dt} + K_e\omega = u, \quad K_T i - \mu\omega = J\dot{\omega},$$

где u — напряжение, i — ток через обмотку, ω — скорость вращения ротора, J — момент инерции, μ — коэффициент трения, K_e и K_T — константы. Перейдём к изображениям $U(s)$, $I(s)$ и $W(s)$:

$$I(s)R + LsI(s) + K_eW(s) = U(s), \quad K_TI(s) - \mu W(s) = JsW(s).$$

Выразим из второго уравнения $I(s)$ и подставим в первое:

$$\frac{1}{K_T}(\mu W(s) + JsW(s))(R + Ls) + K_eW(s) = U(s)$$

$$W(s) = \frac{K_T}{(\mu + Js)(R + Ls) + K_e} U(s).$$

Таким образом, передаточная функция двигателя имеет вид

$$H(s) = \frac{K_T}{JLs^2 + (RJ + \mu L)s + \mu R + K_e}.\#$$

Пример 16. Рассмотрим теперь линеаризованную систему из примера 6. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{(m+M)g}{lM} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \\ 0 \\ -\dfrac{1}{lM} \end{pmatrix};$$

можно вычислить

$$(sE - A)^{-1}B = \frac{1}{-Mls^2 + (M+m)g} \begin{pmatrix} \frac{g - ls^2}{s^2} \\ \frac{g - ls^2}{s} \\ 1 \\ s \end{pmatrix}.$$

Если считать выходом системы положение тележки x, то $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и передаточная функция от F к x

$$H_{xF}(s) = \frac{g - ls^2}{-Mls^4 + (M+m)gs^2}.$$

Если же считать выходом угол поворота маятника θ, то $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и

$$H_{\theta F}(s) = \frac{1}{-Mls^2 + (M+m)g}.$$

Свойства передаточных функций

1. Элементами матрицы $H(s)$ являются дробно-рациональные функции, степень числителя которых не превосходит степени знаменателя, а если $D = 0$, то строго меньше неё. При этом знаменатель всех дробей в матрице одинаков (с точностью до возможных сокращений) и равен $\det(sE - A)$.

◀ Чтобы убедиться в этом, рассмотрим множитель $(sE - A)^{-1}$. Его элемент в i-й строке и j-м столбце равен $A_{ji}/\det(sE - A)$, где A_{ji} — алгебраическое дополнение матрицы A. Алгебраическое дополнение получается из исходной матрицы вычёркиванием строки и столбца (вместе с переменной s), поэтому его степень как многочлена от s будет меньше степени $\det(sE - A)$. Умножение слева и справа на постоянные матрицы C и B эквивалентно вычислению линейных комбинаций строк и столбцов $(sE - A)^{-1}$ и не может повысить степень числителей. При ненулевой матрице D приведение к общему знаменателю даёт слагаемое $\frac{\det(sE-A)D}{\det(sE-A)}$, откуда и возникают дроби с одинаковыми степенями числителя и знаменателя. ▶

Системы (24), в которых $D = 0$, называют *строго реализуемыми.*

Замечание. Сокращать числитель и знаменатель в элементах передаточной функции не следует: наличие одинаковых корней у числителя и знаменателя несёт важную информацию.

Пример 17. Рассмотрим систему с векторным управлением

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 - x_2 + u_1 - 3u_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - 3x_2 + u_1 + u_2 \\ y &= x_1 - x_2. \end{cases}$$

Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = 0.$$

$$sE - A = \begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ -2 & s+3 \end{pmatrix}, \quad \det(sE-A) = s^2 + 2s - 1,$$

$$(sE-A)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{s+3}{s^2+2s-1} & \dfrac{-1}{s^2+2s-1} \\ \dfrac{2}{s^2+2s-1} & \dfrac{s-1}{s^2+2s-1} \end{pmatrix};$$

$$H(s) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{s+3}{s^2+2s-1} & \dfrac{-1}{s^2+2s-1} \\ \dfrac{2}{s^2+2s-1} & \dfrac{s-1}{s^2+2s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{s+1}{s^2+2s-1} & \dfrac{-s}{s^2+2s-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{s^2+2s-1} & \dfrac{-4s-3}{s^2+2s-1} \end{pmatrix}.$$

Замечание. Отдельный Элемент $H_{ij}(s)$ матрицы $H(s)$ имеет отдельный смысл: это передаточная функция SISO-системы, полученной из исходной удалением всех выходов, кроме i-го, и всех входов, кроме j-го (неиспользуемые входы считаются $=0$).

Напомним, что устойчивость линейной стационарной неавтономной системы $\dot{x} = Ax + f(t)$ не зависит от функции $f(t)$, поэтому можно говорить об устойчивости разомкнутой линейной системы $\dot{x} = Ax + Bu$ без выбора фиксированного управления $u(t)$.

Корни числителя передаточной функции системы называются её *нулями*, а корни знаменателя — *полюсами*.

Заметим, что по свойству **1** знаменатели всех элементов матричной передаточной функции совпадают, поэтому можно говорить о полюсах системы с любыми размерами входов и выходов.

2. Линейная система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все её полюса имеют отрицательные вещественные части.

◀ Очевидно с учётом того, что знаменатель $\det(sE - A)$ с точностью до знака совпадает с характеристическим многочленом матрицы A. ▶

Пример 18. Исследуем устойчивость системы с передаточной функцией

$$\frac{s-1}{s^2+s-2}.$$

Полюса системы 1 и -2, значит, система неустойчива.

---

3. Передаточная функция системы не меняется при линейной замене переменных.

◀ Подставим $x = T\tilde{x}$, $\det T \neq 0$ в (24):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} T\dot{\tilde{x}} & = & AT\tilde{x} + Bu \\ y & = & CT\tilde{x} + Du \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\tilde{x}} & = & T^{-1}AT\tilde{x} + T^{-1}Bu \\ y & = & CT\tilde{x} + Du \end{array} \right. ;$$

Передаточная функция новой системы

$$\tilde{H}(s) = CT(sE - T^{-1}AT)T^{-1}B + D = C(sTET^{-1} - TT^{-1}ATT^{-1})B + D = C(sE - A)^{-1}B + D = H(s). \ ▶$$

Замечание. Обратное неверно: из того, что две системы (24) имеют одинаковые передаточные функции, не следует, что одна может быть получена из другой линейной заменой переменной состояния.

Упражнение. Приведите пример, подтверждающий замечание.

Последовательным соединением систем

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & A_1x_1 + B_1u_1 \\ y_1 & = & C_1x_1 + D_1u_1 \end{array} \right. , \quad x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}, \ u_1 \in \mathbb{R}^m, \ y \in \mathbb{R}^k$$

и

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_2 & = & A_2x_2 + B_2u_2 \\ y_2 & = & C_2x_2 + D_2u_2 \end{array} \right. , \quad x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}, \ u_2 \in \mathbb{R}^k, \ y \in \mathbb{R}^l$$

называется система

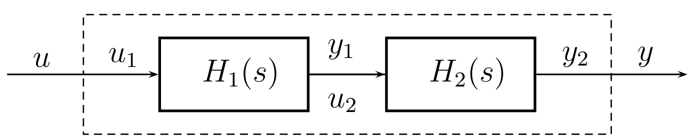
$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & A_1x_1 + B_1u \\ \dot{x}_2 & = & A_2x_2 + B_2(C_1x_1 + D_1u) \\ y & = & C_2x_2 + D_2(C_1x_1 + D_1u) \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x} & = & Ax + Bu \\ y & = & Cx + Du, \end{array} \right. , \quad x \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}, \ u \in \mathbb{R}^m, \ y \in \mathbb{R}^l$$

где $x = (x_1 \, x_2)^T$,

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline B_2C_1 & A_2 \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2D_1 \end{array} \right), \quad C = \left(\begin{array}{c|c} D_2C_1 & C_2 \end{array} \right), \quad D = D_2D_1.$$



4. Передаточная функция последовательного содинения систем с передаточными функциями $H_1(s)$ и $H_2(s)$ равна $H_2(s)H_1(s)$.

◀ Из (25) очевидно

$$\mathcal{L}(y_2) = H_2(s)\mathcal{L}(u_2) = H_2(s)\mathcal{L}(y_1) = H_2(s)H_1(s)\mathcal{L}(u_1). \ ▶$$

Системы Для SISO-систем $H_1(s)$ и $H_2(s)$ — скаляры и $H_2(s)H_1(s) = H_1(s)H_2(s)$. В общем случае матрицы $H_1(s)$ и $H_2(s)$ менять местами нельзя.

Параллельным соединением систем

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}_1 & = & A_1x_1+B_1u_1 \\ y_1 & = & C_1x_1+D_1u_1\end{array}\right., \quad x_1\in\mathbb{R}^{n_1},\ u_1\in\mathbb{R}^m,\ y_1\in\mathbb{R}^k$$

и

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}_2 & = & A_2x_2+B_2u_2 \\ y_2 & = & C_2x_2+D_2u_2\end{array}\right., \quad x_2\in\mathbb{R}^{n_2},\ u_2\in\mathbb{R}^m,\ y_2\in\mathbb{R}^k$$

называется система

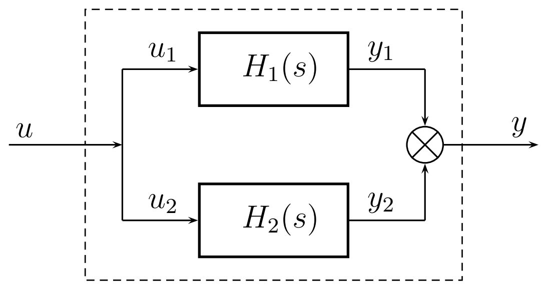
$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}_1 & = & A_1x_1+B_1u \\ \dot{x}_2 & = & A_2x_2+B_2u \\ y & = & C_1x_1+C_2x_2+(D_1+D_2)u\end{array}\right.$$

или

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x} & = & Ax+Bu \\ y & = & Cx+Du,\end{array}\right., \quad x\in\mathbb{R}^{n_1+n_2},\ u\in\mathbb{R}^m,\ y\in\mathbb{R}^k$$

где $x=(x_1\,x_2)^T$,

$$A=\left(\begin{array}{c|c}A_1 & 0\\ \hline 0 & A_2\end{array}\right),\quad B=\left(\begin{array}{c}B_1\\ \hline B_2\end{array}\right),\quad C=\left(\begin{array}{c|c}C_1 & C_2\end{array}\right),\quad D=D_1+D_2.$$



5. Передаточная функция параллельного соединения систем с передаточными функциями $H_1(s)$ и $H_2(s)$ равна $H_1(s)+H_2(s)$.

◄ $\mathcal{L}(y)=\mathcal{L}(y_1+y_2)=\mathcal{L}(y_1)+\mathcal{L}(y_2)=H_1(s)\mathcal{L}(u)+H_2(s)\mathcal{L}(u)=(H_1(s)+H_2(s))\mathcal{L}(u).$ ►

Уравнения системы

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}_1 & = & A_1x_1+B_1u_1 \\ y_1 & = & C_1x_1+D_1u_1\end{array}\right., \quad x_1\in\mathbb{R}^{n_1},\ u_1\in\mathbb{R}^m,\ y_1\in\mathbb{R}^k,$$

замкнутой системой

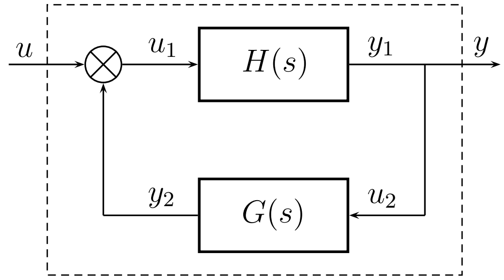
$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}_2 & = & A_2x_2+B_2u_2 \\ y_2 & = & C_2x_2+D_2u_2\end{array}\right.. \quad x_2\in\mathbb{R}^{n_2}.\ u_2\in\mathbb{R}^k,\ y_2\in\mathbb{R}^m,$$

можно записать как

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}_1 & = & A_1x_1+B_1(u+y_2) \\ \dot{x}_2 & = & A_2x_2+B_2y_1 \\ y_1 & = & C_1x_1+D_1(u+y_2) \\ y_2 & = & C_2x_2+D_2y_1\end{array}\right.$$

или

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}_1 & = & A_1x_1+B_1(u+C_2x_2+D_2y) \\ \dot{x}_2 & = & A_2x_2+B_2(C_1x_1+D_1(u+C_2x_2+D_2y)) \\ y & = & C_1x_1+D_1(u+C_2x_2+D_2y).\end{array}\right.$$



Упражнение. Запишите вид матриц A, B, C, D для замкнутой системы.

6. Система с передаточной функцией $H(s)$, замкнутая системой с передаточной функцией $G(s)$, имеет передаточную функцию $(E - H(s)G(s))^{-1}H(s)$ или, что то же самое, $H(s)(E - G(s)H(s))^{-1}$.

◀ Имеем $\mathcal{L}(y) = H(s)\mathcal{L}(u_1)$. Так как $u_1 = u + y_2$, то $\mathcal{L}(y) = H(s)(\mathcal{L}(u) + G(s)\mathcal{L}(y))$, откуда

$$\mathcal{L}(y) = H(s)\mathcal{L}(u) + H(s)G(s)\mathcal{L}(y)$$

$$\mathcal{L}(y) = (E - H(s)G(s))^{-1}H(s)\mathcal{L}(u).$$

С другой стороны, так как $\mathcal{L}(u_1) = \mathcal{L}(u + y_2) = \mathcal{L}(u) + G(s)H(s)\mathcal{L}(u_1)$, то

$$\mathcal{L}(u_1) = (E - G(s)H(s))^{-1}\mathcal{L}(u),$$

то есть $\mathcal{L}(y) = H(s)\mathcal{L}(u_1) = H(s)(E - G(s)H(s))^{-1}\mathcal{L}(u)$. ▶

Для SISO-системы искомую передаточную функцию можно записать как $\dfrac{H(s)}{1 - H(s)G(s)}$. Часто рассматривают контур с отрицательной обратной связью; в этом случае формулу записывают как $H(s)(E + G(s)H(s))^{-1}$ или $\dfrac{H(s)}{1 + H(s)G(s)}$.

Частотные характеристики линейных систем

Рассмотрим систему (24), на вход которой поступает комплексный сигнал вида $u(t) = \tilde{u}e^{st}$, где j — мнимая единица, $\tilde{u}$ — постоянный вектор, $s \in \mathbb{C}$, $x(0) = x_0$. Будем искать решение в виде $x(t) = \tilde{x}e^{st}$, $\tilde{x}$ — некоторая константа. Подставив $u(t)$ и $x(t)$ в первое уравнение (24), получим

$$s\tilde{x}e^{st} = A\tilde{x}e^{st} + B\tilde{u}e^{st}$$

$$(sE - A)\tilde{x}e^{st} = B\tilde{u}e^{st}$$

$$(sE - A)\tilde{x} = B\tilde{u}$$

Пусть имеет место нерезонансный случай: s не совпадает ни с одним из собственных чисел матрицы A. Тогда $\det(sE - A) \neq 0$ и

$$\tilde{x} = (sE - A)^{-1}B\tilde{u}$$

и

$$x(t) = (sE - A)^{-1}B\tilde{u}e^{st}.$$

Мы нашли частное решение неоднородной системы

$$\dot{x} = Ax + B\tilde{u}e^{st}.$$

Её общее решение получится как сумма $x(t)$ и общего решения однородной системы $\dot{x} = Ax$. Все решения однородной системы с гурвицевой матрицей A асимптотически устойчивы и при $t \to +\infty$ стремятся к нулю, поэтому каждое решение неоднородной системы стремится к $x(t)$.

Подставим теперь $x(t)$ во второе равенство (24):

$$y(t) = C(sE - A)^{-1}B\tilde{u}e^{st} + D\tilde{u}e^{st} = (C(sE - A)^{-1}B + D)\tilde{u}e^{st} = H(s)\tilde{u}e^{st} = H(s)u(t).$$

Пусть теперь $s = j\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, $u(t) = \tilde{u}e^{j\omega t} = \tilde{u}(\cos\omega t + j\sin\omega t)$ — *комплексный гармонический сигнал.* Тогда

$$y(t) = H(j\omega)\tilde{u}e^{j\omega t} = H(j\omega)u(t). \tag{26}$$

Функцию $W(\omega) = H(j\omega)$ называют *частотной характеристикой* системы с передаточной функцией $H(s)$. Для SISO-систем называют также её модуль $A(\omega) = |W(\omega)|$ *амплитудно-частотной характеристикой*, аргумент $\varphi(\omega) = \arg W(\omega)$ — *фазо-частотной характеристикой.*

Поясним смысл (26). Если $H(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$, то при прохождении гармонического сигнала с угловой частотой ω через систему его модуль умножается на $A(\omega)$, а фаза сдвигается на $\varphi(\omega)$:

$$y(t) = H(j\omega)\tilde{u}e^{j\omega t} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}\tilde{u}e^{j\omega t} = A(\omega)\tilde{u}e^{j(\omega t+\varphi(\omega))}.$$

Перейдём теперь к вещественному случаю. Как известно из курса алгебры, для многочлена $P(s)$ с вещественными коэффициентами справедливо равенство

$$\forall s \in \mathbb{C} \quad P(\overline{s}) = \overline{P(s)}.$$

Поскольку передаточная функция — отношение многочленов с вещественными коэффициентами,

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad H(-j\omega) = \overline{H(j\omega)};$$

отсюда

$$A(-\omega) = A(\omega), \qquad \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega).$$

Выберем в качестве входного сигнала

$$u(t) = \tilde{u}\cos\omega t = \frac{1}{2}\tilde{u}e^{j\omega t} + \frac{1}{2}\tilde{u}e^{-j\omega t} = u_1(t) + u_2(t)$$

(Вместо косинуса можно взять синус или их линейную комбинацию — всё будет аналогично). Выход, соответствующий такому входу, в силу линейности нашей системы будет равен сумме

$$y(t) = H(j\omega)u_1(t) + H(-j\omega)u_2(t) = \frac{1}{2}A(\omega)\tilde{u}e^{j(\omega t+\varphi(\omega))} + \frac{1}{2}A(\omega)\tilde{u}e^{j(-\omega t-\varphi(\omega))} =$$

$$= \frac{1}{2}A(\omega)\tilde{u}\left(e^{j(\omega t+\varphi(\omega))} + e^{j(-\omega t-\varphi(\omega))}\right) = A(\omega)\tilde{u}\cos\left(\omega t + \varphi(\omega)\right).$$

Частотные критерии устойчивости

Замечание. Далее под аргументом комплексной функции $\arg P(j\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, будем понимать не главное значение аргумента, а непрерывную при $P(j\omega) \neq 0$ функцию, выражающую одно из значений аргумента через ω.

Теорема 4. (критерий Михайлова) Для того, чтобы многочлен $P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0$, $a_n > 0$, был устойчивым (т.е. имел корни только с отрицательными вещественными частями) необходимо и достаточно, чтобы величина $\arg P(j\omega)$ при $\omega \in [0, +\infty)$ была определена и монотонно возрастала от 0 до $\pi n/2$.

◄ Заметим сначала, что $\arg P(j\omega)$ не определён тогда и только тогда, когда $P(j\omega) = 0$, т.е. P имеет чисто мнимые корни. В этом случае P неустойчив, поэтому далее будем считать $\forall \omega \in \mathbb{R} \;\; P(j\omega) \neq 0$.

Заметим также, что $P(0) = a_0$; для устойчивого $P(s)$ $a_0 > 0$ и $\arg P(0) = 0$. Далее случай $a_0 < 0$ (т.е. $\arg P(0) = \pi$) рассматривать не будем, т.к. при этом $P(s)$ неустойчив и условия теоремы не выполняются.

Запишем наш многочлен в виде

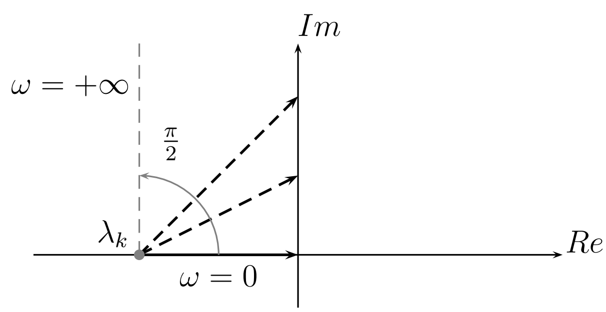
$$P(s) = a_n(s-\lambda_1)\ldots(s-\lambda_n);$$

тогда

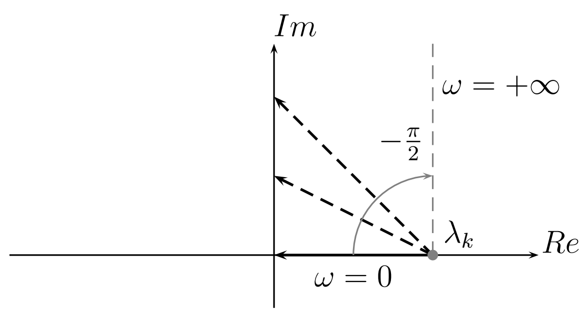
$$\arg P(j\omega) = \arg\left[a_n(j\omega-\lambda_1)\ldots(j\omega-\lambda_n)\right] = \sum_{k=1}^{n}\arg(j\omega-\lambda_k). \tag{27}$$

Подсчитаем теперь приращение каждого из аргументов суммы (27) при $\omega \to +\infty$. Как известно, множество корней многочлена с вещественными коэффициентами состоит из вещественных корней и пар комплексно сопряжённых корней. Рассмотрим оба случая. Обозначим

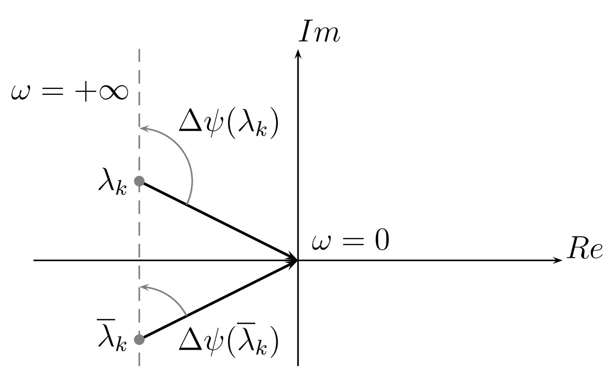
$$\psi(\lambda_k,\omega) = \arg(j\omega-\lambda_k), \quad \Delta\psi(\lambda_k) = \lim_{\omega\to+\infty}\psi(\lambda_k,\omega) - \psi_k(\lambda_k,0).$$



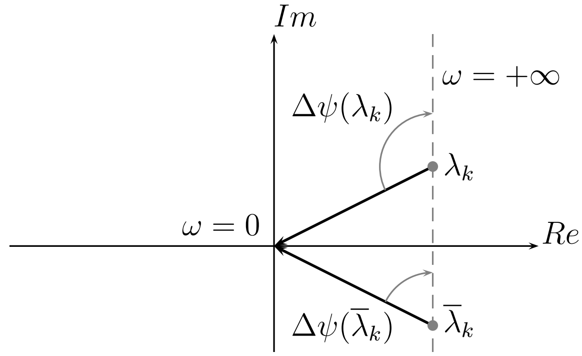
Вещественный отрицательный корень: $\Delta\psi(\lambda_k) = \frac{\pi}{2}$.



Вещественный положительный корень: $\Delta\psi(\lambda_k) = -\frac{\pi}{2}$.



Сопряжённые корни с отрицательной вещественной частью: $\Delta\psi(\lambda_k) + \Delta\psi(\overline{\lambda}_k) = \pi$.



Сопряжённые корни с положительной вещественной частью: $\Delta\psi(\lambda_k) + \Delta\psi(\overline{\lambda}_k) = -\pi$.

Таким образом, суммарное приращение

$$\lim_{\omega\to+\infty} \arg P(j\omega) - \arg P(0) = \sum_{k=1}^{n} \Delta\psi(\lambda_k) = \frac{\pi}{2}(p-q), \tag{28}$$

где p и q — количества корней $P(s)$ с отрицательными и положительными вещественными частями, $p+q=n$. С учётом того, что мы рассматриваем случай $\arg P(0) = 0$, это доказывает утверждение теоремы. ▶

Замечание. Условие критерия Михайлова имеет геометрическую интерпретацию: годограф $P(j\omega)$ должен пробегать n координатных четвертей, начиная с первой, против часовой стрелки, не проходя через начало координат.

Годограф $P(j\omega)$ называется также *годографом Михайлова*.

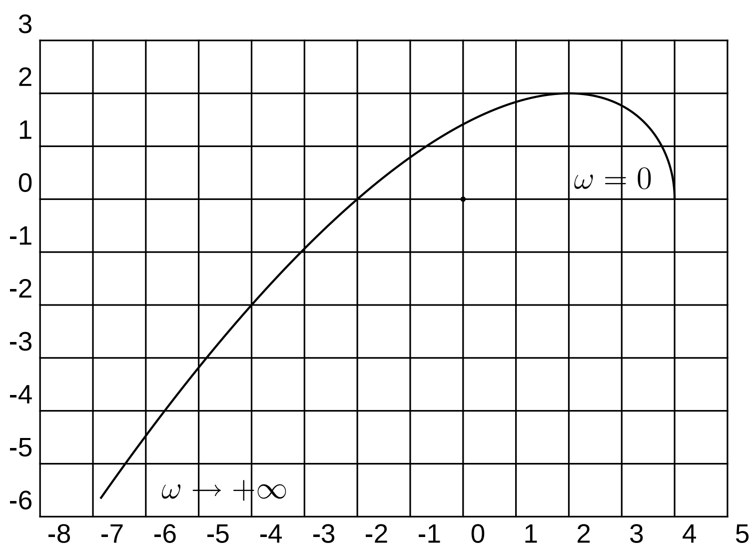
Пример 19. Исследуем устойчивость многочлена $P(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4$. Имеем

$$P(j\omega) = (-\omega^3 + 3\omega)j + (-2\omega^2 + 4);$$

то есть нужно изобразить на плоскости параметрически заданную кривую

$$\operatorname{Re} z = -2\omega^2 + 4, \quad \operatorname{Im} z = -\omega^3 + 3\omega.$$

Заметим, что при $\omega \to +\infty$ угол наклона годографа стремится к $3\pi/2$:



Из всего этого следует, что многочлен устойчив. #

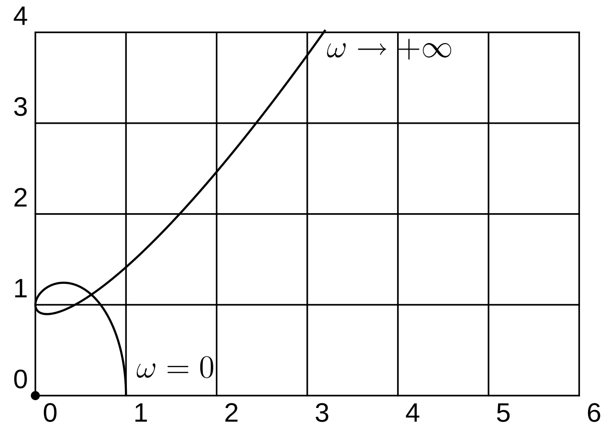
Пример 20. Исследуем устойчивость многочлена $P(s) = s^5 + s^4 + 3s^3 + 2s^2 + 3s + 1$. Имеем

$$P(j\omega) = (\omega^5 - 3\omega^3 + 3\omega)j + (\omega^4 - 2\omega^2 + 1);$$

то есть нужно изобразить на плоскости параметрически заданную кривую

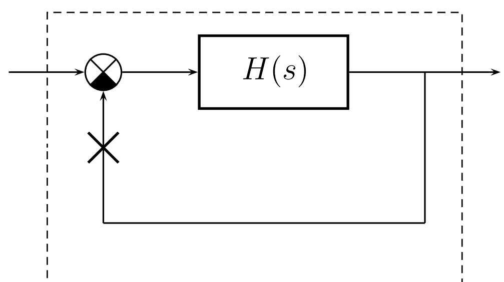
$$\operatorname{Re} z = \omega^4 - 2\omega^2 + 1, \quad \operatorname{Im} z = \omega^5 - 3\omega^3 + 3\omega.$$

Заметим, что при $\omega \to +\infty$ угол наклона годографа стремится к $\pi/2$.



Таким образом, многочлен неустойчив. #

Теперь представим себе, что мы можем измерить АЧХ и ФЧХ системы с разомкнутым контуром управления.



Будет ли замкнутая система устойчива? Ответ даёт следующая

Теорема 5. (критерий Найквиста) Пусть передаточная функция $H(s)$ разомкнутой системы имеет q полюсов с положительной вещественной частью и не имеет чисто мнимых полюсов. Тогда замкнутая система устойчива в том и только в том случае, когда годограф $H(j\omega)$ не проходит через точку -1 и делает вокруг неё $q/2$ поворотов против часовой стрелки.

◀ Пусть

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)},$$

где $A(s)$ и $B(s)$ — некоторые многочлены, $\deg A \leqslant \deg B$. Передаточная функция замкнутой системы

$$\frac{H(s)}{1 + H(s)} = \frac{A(s)}{A(s) + B(s)},$$

характеристический многочлен $P(s) = A(s) + B(s)$. Применим к нему критерий Михайлова:

$$P(j\omega) = B(j\omega)(1 + H(j\omega));$$

при изменении ω от 0 до $+\infty$

$$\Delta \arg P(j\omega) = \Delta \arg B(j\omega) + \Delta \arg(1 + H(j\omega)).$$

В соответствии с формулой (28)

$$\Delta \arg B(j\omega) = \frac{\pi}{2}(p - q) = \frac{\pi}{2}(n - 2q) = \frac{\pi n}{2} - \pi q.$$

Тогда (опять же по критерию Михайлова) для устойчивости $P(s)$ необходимо и достаточно, чтобы $\Delta \arg(1 + H(j\omega)) = \pi q$ и $1 + H(j\omega) \neq 0$. Эти условия совпадают с утверждением теоремы. ▶

Пример 21. Рассмотрим систему с передаточной функцией

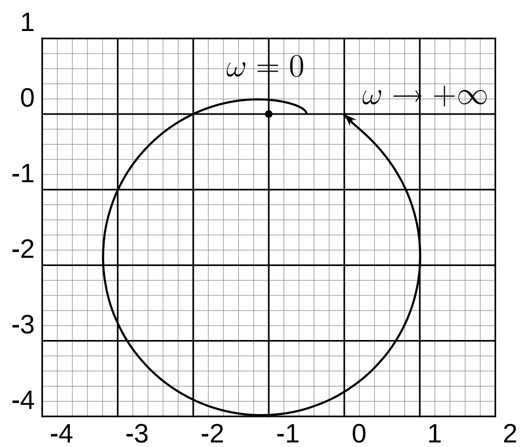
$$H(s) = \frac{-1}{2s^3 + 3s^2 + s + 2}.$$

Корни многочлена $2s^3+3s^2+s+2$ равны примерно -1.583 и $0.0416 \pm 0.794i$, поэтому для устойчивости замкнутой системы годограф $P(j\omega)$ должен сделать вокруг точки $(-1, 0)$ один оборот. Имеем

$$H(j\omega) = \frac{-1}{-2j\omega^3 - 3\omega^2 + j\omega + 2} = \frac{1}{3\omega^2 - 2 + j(2\omega^3 - \omega)} = \frac{3\omega^2 - 2 - j(2\omega^3 - \omega)}{(3\omega^2 - 2)^2 + (2\omega^3 - \omega)^2};$$

то есть нужно изобразить на плоскости параметрически заданную кривую

$$\operatorname{Re} z = \frac{3\omega^2 - 2}{(3\omega^2 - 2)^2 + (2\omega^3 - \omega)^2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{\omega - 2\omega^3}{(3\omega^2 - 2)^2 + (2\omega^3 - \omega)^2}:$$

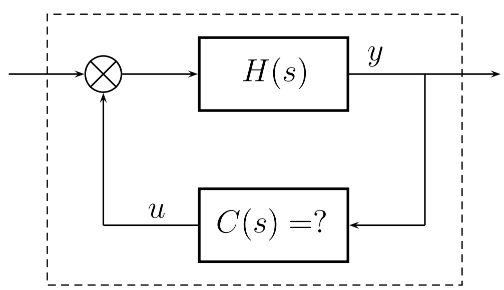


Из рисунка видно, что годограф совершает один оборот вокруг точки $(-1, 0)$. Таким образом, замкнутая система устойчива. #

Стабилизация систем, заданных передаточными функциями

Задачу стабилизации системы с передаточной функцией $H(s)$ можно сформулировать так: какова должна быть передаточная функция регулятора $C(s)$, чтобы замкнутая им система имела заданные полюса (или хотя бы полюса с отрицательными вещественными частями)?

Далее ограничимся случаем SISO-систем.



Для решения этой задачи можно попытаться применить:

— П-регулятор: $C(s) = k$;
— ПИ-регулятор: $C(s) = k + \dfrac{k_1}{s}$;
— ПИД-регулятор: $C(s) = k + \dfrac{k_1}{s} + k_2 s$;
— Регулятор произвольной структуры: $C(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$, где $N(s)$ и $D(s)$ — некоторые многочлены.

Первыми тремя способами можно добиться стабилизации лишь некоторых систем, причём заранее трудно сказать, будет ли конкретная система стабилизируема с помощью того или иного регулятора. Регулятор произвольной структуры может стабилизировать любую управляемую и наблюдаемую систему.

Для выяснения возможности стабилизации П-регулятором можно использовать критерий Найквиста [...].

D-разбиение.

Пусть имеется система с передаточной функцией

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)},$$

где $A(s)$ и $B(s)$ — некоторые многочлены. Попытаемся найти такие константы k и k_1, чтобы эта система, замкнутая ПИ-регулятором $C(s) = k + \dfrac{k_1}{s}$, оказалась устойчивой. Передаточная функция замкнутой системы

$$\frac{H(s)}{1 - H(s)C(s)} = \frac{\frac{A(s)}{B(s)}}{1 - \frac{A(s)}{B(s)}\left(k + \frac{k_1}{s}\right)} = \frac{A(s)}{B(s) - A(s)\left(k + \frac{k_1}{s}\right)} = \frac{sA(s)}{sB(s) - ksA(s) - k_1 A(s)}$$

имеет знаменатель $P(s, k, k_1) = sB(s) - ksA(s) - k_1 A(s)$, зависящий от параметров k и k_1. Исследуем зависимость его корней от этих параметров. Используем известный факт: корни многочлена постоянной степени непрерывно зависят от его коэффициентов. Если нужно математической строгости, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 6. Пусть $P(s, q)$ — многочлен степени n относительно s, коэффициенты которого являются непрерывными функциями от параметров $q \in \mathbb{R}^m$:

$$P(s, q) = a_0(q) + a_1(q)s + \ldots + a_n(q)s^n,$$

причём $a_n(0) \neq 0$, $s_1(q), \ldots s_n(q)$ — корни многочлена. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при всех таких q, что $\|q\| \leqslant \delta$ корни $s_i(q)$ можно пронумеровать так, что

$$|s_i(q) - s_i(0)| \leqslant \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Замечание. Эта теорема имеет важное очевидное следствие: соственные числа матрицы непрерывно зависят от её элементов.

Из этого следует, что плоскость (k, k_1) можно разбить на области, в каждой из которых количество корней с отрицательной вещественной частью будет одинаковым. Для этого надо нанести на эту плоскость те точки, в которых выполняется хотя бы одно из двух условий:

1. Коэффициент $P(s,k,k_1)$ при старшей степени s обращается в 0;

2. $\exists\omega \in \mathbb{R}: \ P(j\omega,k,k_1)=0$, то есть у $P(s,k,k_1)$ есть нулевой корень или пара чисто мнимых корней.

Действительно, для того, чтобы при непрерывном изменении параметров знак вещественной части какого-то корня изменился, нужно, чтобы либо изменилась степень многочлена (старший коэффициент $=0$), либо чтобы корень (или пара корней) стали чисто мнимыми. Получаемое таким образом разбиение плоскости параметров на подмножества и называется *D-разбиением.* Получив D-разбиение, легко выяснить возможность стабилизации ПИ-регулятором, вычислив количества корней с отрицательной вещественной частью для каждого из подмножеств (для этого можно проанализировать по одной точке из каждого подмножества).

Пример 22. Выясним, можно ли стабилизировать ПИ-регулятором систему с передаточной функцией

$$H(s)=\frac{s-1}{s^2+s-1}.$$

Имеем

$$P(s,k,k_1)=s(s^2+s-1)-ks(s-1)-k_1(s-1)=s^3+s^2(1-k)+s(-1+k-k_1)+k_1.$$

Коэффициент при s^3 равен 1, т.е. нигде не обращается в ноль. Найдём те сочетания параметров, при которых $P(s,k,k_1)$ имеет чисто мнимые корни:

$$P(j\omega,k,k_1)=-j\omega^3-\omega^2(1-k)+j\omega(-1+k-k_1)+k_1=j\omega\left(-\omega^2-1+k-k_1\right)-\omega^2(1-k)+k_1;$$

для того, чтобы многочлен обращался в 0, надо, чтобы нулю были равны его вещественная и мнимая части:

$$\begin{cases} \omega\left(-\omega^2-1+k-k_1\right) & = & 0 \\ -\omega^2(1-k)+k_1 & = & 0. \end{cases}$$

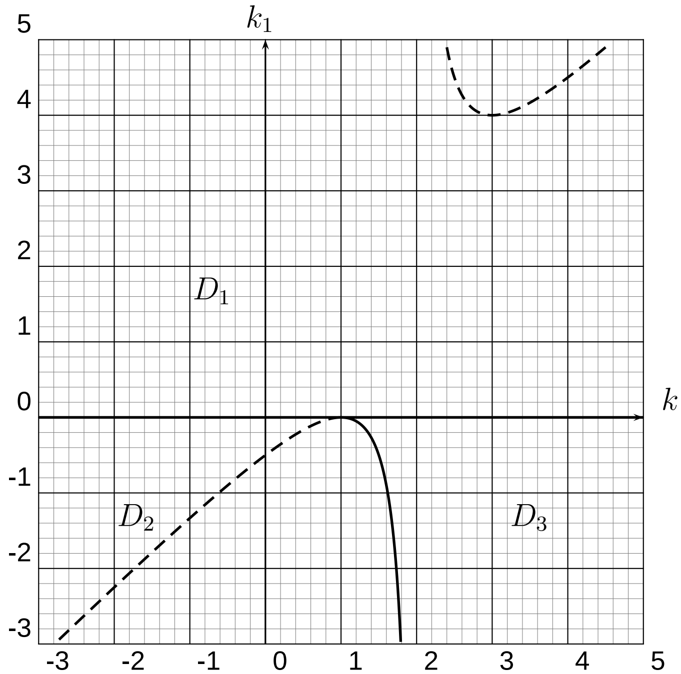
Если $\omega=0$, то $k_1=0$, k — любое. Таким образом, одно из «граничных» множеств, отделяющих подмножества D-разбиения друг от друга — прямая $k_1=0$. Чтобы найти второе такое множество, выразим ω^2 из второго уравнения и подставим в первое:

$$-\frac{k_1}{1-k}-1+k-k_1=0.$$

Заметим, что при этом нас интересуют только точки, для которых $\omega^2=k_1/(1-k)\geqslant 0$. Домножив на $1-k$ и раскрыв скобки, получим

$$k_1=\frac{k^2-2k+1}{k-2}.$$

Теперь можно построить D-разбиение:



Пунктиром показаны те участки кривой, для которых не выполняется условие $k_1/(1-k) \geqslant 0$.

Выясним, сколько корней с отрицательными вещественными частями будет у замкнутой системы для каждого из подмножеств D-разбиения. Для этого выберем по одной точке для каждого подмножества и вычислим корни $P(s,k,k_1)$. Нетрудно убедиться (например, с помощью MATLAB), что

1) при $(k,k_1) \in D_1$ $P(s,k,k_1)$ имеет один корень с отрицательной вещественной частью;
2) при $(k,k_1) \in D_2$ $P(s,k,k_1)$ имеет два корня с отрицательной вещественной частью;
3) при $(k,k_1) \in D_3$ $P(s,k,k_1)$ не имеет корней с отрицательной вещественной частью.

Таким образом, нашу систему нельзя стабилизировать ПИ-регулятором. #

Замечание Метод D-разбиения можно применить не только для конструирования ПИ-регуляторов. Аналогичный подход применим и для других видов регуляторов с двумя параметрами, например, $C(s) = \dfrac{k_1}{k_2+s}$.

Стабилизация регулятором произвольной структуры

Пусть

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)},$$

где $A(s)$ и $B(s)$ — некоторые многочлены, $\deg A \leqslant \deg B$, — передаточная функция нашей системы. Если регулятор имеет передаточную функцию

$$C(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

то передаточная функция замкнутой системы будет равна

$$\frac{H(s)}{1-H(s)C(s)} = \frac{\frac{A(s)}{B(s)}}{1-\frac{A(s)}{B(s)}\frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{A(s)D(s)}{B(s)D(s)-A(s)N(s)}.$$

Потпытаемся найти такие $N(s)$ и $D(s)$, чтобы знаменатель $B(s)D(s)-A(s)N(s)$ был равен некоторому заданному устойчивому многочлену $P(s)$:

$$B(s)D(s) - A(s)N(s) = P(s). \tag{29}$$

Всегда ли это можно сделать? Оказывается, что справедлива следующая

Теорема 7. Для того, чтобы уравнение (29) имело решение для любого $P(s)$, необходимо и достаточно, чтобы многочлены $A(s)$ и $B(s)$ не имели одинаковых корней.

Пример 23. Найдём регулятор, стабилизирующий систему с передаточной функцией

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2+s-6}.$$

Будем искать $N(s)$ в виде $\nu_0 + \nu_1 s$, а $D(s)$ в виде $\delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2$. Потребуем, чтобы полюса замкнутой системы совпадали с корнями многочлена

$$P(s) = (s+1)(s+2)(s+3)(s+4) = s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24.$$

Знаменатель замкнутой системы

$$B(s)D(s) - A(s)N(s) = (s^2+s-6)(\delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2) - (s-1)(\nu_0 + \nu_1 s) = \delta_2 s^4 + (\delta_1 + \delta_2)s^3 +$$

$$+(\delta_0 + \delta_1 - 6\delta_2)s^2 + (\delta_0 - 6\delta_1)s - 6\delta_0 - (\nu_1 s^2 + (\nu_0 - \nu_1)s - \nu_0) =$$

$$= \delta_2 s^4 + (\delta_1 + \delta_2)s^3 + (\delta_0 + \delta_1 - 6\delta_2 - \nu_1)s^2 + (\delta_0 - 6\delta_1 + \nu_1 - \nu_0)s - 6\delta_0 + \nu_0.$$

Это выражение должно при всех s совпадать с многочленом $P(s)$, поэтому их коэффициенты должны быть равны:

$$\begin{cases} \delta_2 & = & 1 \\ \delta_1 + \delta_2 & = & 10 \\ \delta_0 + \delta_1 - 6\delta_2 - \nu_1 & = & 35 \\ \delta_0 - 6\delta_1 + \nu_1 - \nu_0 & = & 50 \\ -6\delta_0 + \nu_0 & = & 24. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений $\delta_2 = 1$, $\delta_1 = 9$, откуда

$$\begin{cases} \delta_0 - \nu_1 & = & 32 \\ \delta_0 + \nu_1 - \nu_0 & = & 104 \\ -6\delta_0 + \nu_0 & = & 24. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $\delta_0 = -40$, $\nu_1 = -72$, $\nu_0 = -216$. Итак, регулятор должен иметь передаточную функцию

$$C(s) = \frac{-72s - 216}{s^2 + 9s - 40}.$$

Задача H_∞-оптимизации

Матрицей, сопряжённой к квадратной комплексной матрице A, называют матрицу A^* с элементами $\{A^*\}_{ij} = \bar{a}_{ji}$, где черта означает скалярное комплексное сопряжение. Число, равное корню из наибольшего собственного значения матрицы A^*A, называют *спектральной нормой* квадратной комплексной матрицы A и обозначают $\|A\|_2$.

Упражнение. Покажите, что для случая матрицы a размера 1×1 (т.е. для числа) $\|a\|_2 = |a|$.

Величину

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|H(j\omega)\|_2$$

называют *H_∞-нормой* передаточной функции $H(s)$.

Замечание. Для случая скалярной передаточной функции (т.е. для SISO-систем)

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |H(j\omega)|.$$

Пример 24. Найдём H_∞-норму передаточной функции $H(s) = \dfrac{1}{s+1}$:

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} |H(j\omega)| = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{j\omega+1}\right| = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \frac{1}{|j\omega+1|} = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}} = 1.$$

2-нормой (или нормой-2) измеримой функции $f(t) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^m$ называется число

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int\limits_0^{+\infty} \|f(t)\|^2\, dt},$$

где $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2}$.

Пример 25. Найдём $\|e^{-\lambda t}\|_2$, $\lambda > 0$.

$$\|e^{-\lambda t}\|_2^2 = \int\limits_0^{+\infty} \left|e^{-\lambda t}\right|^2\, dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-2\lambda t}\, dt = \frac{-1}{2\lambda}\left(e^{-2\lambda t}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2\lambda}.$$

Таким образом, $\|e^{-\lambda t}\|_2 = 1/\sqrt{2\lambda}$.

Пример 26. Найдём 2-норму векторнозначной функции $\varphi(t) = \left(\dfrac{1}{t+1}, \dfrac{2}{t+1}\right)$.

$$\|\varphi\|_2^2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{4}{(t+1)^2}\, dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{5\, d(t+1)}{(t+1)^2} = \frac{-5}{t+1}\Big|_0^{+\infty} = 5,$$

поэтому $\|\varphi\|_2 = \sqrt{5}$.

Пример 27. Функции t, $\sin t$, $\sqrt{t}$, 1 не имеют конечной 2-нормы.

Множество измеримых на $[0, +\infty)$ функций, имеющих конечную 2-норму, замкнуто относительно операций сложения и умножения на число и является линейным пространством. Это пространство носит название L_2.

Можно доказать, что в L_2 справедливы следующие *аксиомы нормы*:

- $\forall f \in L_2\ \|f\|_2 \geqslant 0$, причём $\|f\|_2 = 0$ тогда и только тогда, когда f принимает ненулевые значения только на множестве меры нуль;
- $\forall f \in L_2, \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda f\|_2 = |\lambda|\ \|f\|_2$;
- $\forall f, g \in L_2\ \|f + g\|_2 \leqslant \|f\|_2 + \|g\|_2$ (неравенство треугольника).

В приложениях 2-норма меняющейся во времени величины часто имеет физический смысл суммарной энергии.

Рассмотрим линейную стационарую систему с выходом

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax + Bu \\ y & = & Cx \end{array}\right. , \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^k \tag{30}$$

как отображение $\mathcal{Y}(u)$ функции $u(t)$ в функцию $y(t)$. При фиксированном начальном состоянии $x(0) = 0$, $t \in [0, +\infty)$

$$\mathcal{Y}(u(t)) = y(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau.$$

Очевидно, $\mathcal{Y}(u)$ является линейным оператором:

$$\mathcal{Y}(u_1 + u_2) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B(u_1(\tau) + u_2(\tau))\, d\tau = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu_1(\tau)\, d\tau + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu_2(\tau)\, d\tau =$$

$$= \mathcal{Y}(u_1) + \mathcal{Y}(u_2);$$

$$\mathcal{Y}(\lambda u) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B\lambda u(\tau)\, d\tau = \lambda \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau = \lambda \mathcal{Y}(u).$$

Индуцированной нормой линейного оператора $\mathcal{A}$ в пространстве L_2 называется число

$$\|\mathcal{A}\|_2 = \sup_{\|f\|_2 \neq 0} \frac{\|\mathcal{A}f\|_2}{\|f\|_2}.$$

Пример 28. Для оператора $\mathcal{A}(u(t)) = ku(t)$, где $u(t)$ — скалярная функция, k — некоторое число,

$$\|\mathcal{A}\|_2 = \sup_{\|f\|_2 \neq 0} \frac{\|ku(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} = \sup_{\|f\|_2 \neq 0} \frac{|k|\, \|u(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} = |k|.$$

Индуцированная норма оператора $\|\mathcal{Y}\|$ имеет важный смысл: это максимальный коэффициент усиления системы по энергии. Если на вход подаётся некий нежелательный сигнал (помехи и т.п.), этот коэффициент показывает степень их возможного влияния на выход системы. В англоязычной литературе он также называется L_2-gain.

Можно поставить (по крайней мере) две задачи, связанные с L_2-gain:

- вычисление L_2-gain;
- оптимизация отдельных параметров системы с целью уменьшения L_2-gain.

Решение первой из этих задач даёт следующая

Теорема 8. Если в системе (30) матрица A гурвицева, $H(s) = C(sE - A)^{-1}B$ — её передаточная функция, то индуцированная норма соответствующего линейного оператора $\|\mathcal{Y}\|$ конечна и

$$\|\mathcal{Y}\| = \sup_{\|u\|_2 \neq 0} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} = \|H(s)\|_\infty.$$

Вторую задачу сформулируем следующим образом. Рассмотрим линейную стационарую систему с выходом и с двумя управлениями

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax + Bu + Dw \\ y & = & Cx \end{array} \right. , \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^k \tag{31}$$

где $w(t)$ — вход с ограниченной L_2-нормой, u — управление, которое будем искать в виде $u = Kx$. Попытаемся найти такую матрицу K, что замкнутая система

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & (A + BK)x + Dw \\ y & = & Cx \end{array} \right. \tag{32}$$

будет асимптотически устойчивой и иметь наименьшую H_∞-норму. Из сформулированной теоремы следует, что для этого надо найти матрицу K, минимизирующую H_∞-норму передаточной функции

$$H(s) = C(sE - A - BK)^{-1}D.$$

Робастная устойчивость и управление. Теорема Харитонова.

В реальности часто возникает ситуация, когда один или несколько параметров системы известны лишь приблизительно (например, принадлежат заданному интервалу). При этом требуется исследовать устойчивость при всех возможных значениях параметров или найти управление, стабилизирующее систему при неопределённых значениях параметров. В первом случае говорят о задаче исследования *робастной устойчивости*, а во втором - о *робастной стабилизации*. Вообще же задачи, связанные с наличием неопределённости в описании системы, называют задачами *робастного управления*.

Неопределённые параметры могут в зависимости от постановки задачи либо быть постоянными, либо меняться во времени. Далее в этом разделе будем рассматривать только первый случай.

Сформулируем задачу робастной устойчивости для *интервальных многочленов*. Интервальным многочленом будем называть множество многочленов вида

$$\mathcal{P}(s) = \{a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n, \quad 0 < \underline{a_i} \leqslant a_i \leqslant \overline{a_i}, \quad i = 1, \ldots, n\}, \tag{33}$$

где $\underline{a_i}$ и $\overline{a_i}$ — некоторые заданные числа. Интервальный многочлен $\mathcal{P}(s)$ будем называть устойчивым, если все элементы $\mathcal{P}(s)$ имеют корни только с отрицательными вещественными частями. Критерием устойчивости интервальных многочленов является следующая

Теорема 9. (Харитонова) Для того, чтобы все многочлены (33) были устойчивы, необходимо и достаточно, чтобы были устойчивы четыре *харитоновских многочлена*

$$\begin{aligned}
P_1(s) &= \underline{a_0} + \underline{a_1}s + \overline{a_2}s^2 + \overline{a_3}s^3 + \underline{a_4}s^4 + \underline{a_5}s^5 + \ldots \\
P_2(s) &= \overline{a_0} + \underline{a_1}s + \underline{a_2}s^2 + \overline{a_3}s^3 + \overline{a_4}s^4 + \underline{a_5}s^5 + \ldots \\
P_3(s) &= \overline{a_0} + \overline{a_1}s + \underline{a_2}s^2 + \underline{a_3}s^3 + \overline{a_4}s^4 + \overline{a_5}s^5 + \ldots \\
P_4(s) &= \underline{a_0} + \overline{a_1}s + \overline{a_2}s^2 + \underline{a_3}s^3 + \underline{a_4}s^4 + \overline{a_5}s^5 + \ldots
\end{aligned}$$

◄ Необходимость очевидна; докажем достаточность. Для каждого из рассматриваемых многочленов $P(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n$

$$P(j\omega) = U(\omega) + j\omega V(\omega),$$

где

$$U(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \ldots, \quad V(\omega) = a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \ldots$$

При этом

$$\underline{U}(\omega) \leqslant U(\omega) \leqslant \overline{U}(\omega), \quad \underline{V}(\omega) \leqslant V(\omega) \leqslant \overline{V}(\omega),$$

где

$$\begin{aligned}
\underline{U}(\omega) &= \underline{a_0} - \overline{a_2}\omega^2 + \underline{a_4}\omega^4 - \ldots, \quad \overline{U}(\omega) = \overline{a_0} - \underline{a_2}\omega^2 + \overline{a_4}\omega^4 - \ldots, \\
\underline{V}(\omega) &= \underline{a_1} - \overline{a_3}\omega^2 + \underline{a_5}\omega^4 - \ldots, \quad \overline{V}(\omega) = \overline{a_1} - \underline{a_3}\omega^2 + \overline{a_5}\omega^4 - \ldots.
\end{aligned}$$

Это означает, что точка $P(j\omega)$ при всех $\omega \in [0, +\infty)$ должна находиться внутри прямоугольника с вершинами

$$z_1 = \underline{U}(\omega) + j\omega\underline{V}(\omega), \quad z_2 = \underline{U}(\omega) + j\omega\overline{V}(\omega), \quad z_3 = \overline{U}(\omega) + j\omega\overline{V}(\omega), \quad z_4 = \overline{U}(\omega) + j\omega\underline{V}(\omega).$$

Но

$$z_1 = P_1(j\omega), \quad z_2 = P_2(j\omega), \quad z_3 = P_3(j\omega), \quad z_4 = P_4(j\omega).$$

Поскольку P_1, P_2, P_3, P_4 — устойчивые многочлены, точки z_1, z_2, z_3, z_4 в соответствии с критерием Михайлова при $\omega \in [0, +\infty)$ совершают $\pi n/2$ оборотов вокруг точки 0 не проходя через неё, их аргументы при этом монотонно возрастают. Вместе с ними находясь внутри прямоугольника делает $\pi n/2$ оборотов и точка $P(j\omega)$. При этом прямоугольник не может «наехать» на 0 по той причине, что в этом случае аргумент одной из вершин не будет монотонно возрастать (здесь нужен рисунок). Значит, $P(j\omega)$ действительно делает $\pi n/2$ оборотов вокруг точки 0 не проходя через неё, следовательно, многочлен $P(s)$ устойчив. ►

Пример 29. Рассмотрим интервальный многочлен

$$\mathcal{P}(s) = \{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3, \quad 1 \leqslant a_0 \leqslant 3, \ \ 4 \leqslant a_1 \leqslant 5, \ \ 2 \leqslant a_2 \leqslant 3, \ \ 1 \leqslant a_3 \leqslant 2\}.$$

Харитоновские многочлены

$$P_1(s) = 1 + 4s + 3s^2 + 2s^3, \quad P_2(s) = 3 + 4s + 2s^2 + 2s^3,$$

$$P_3(s) = 3 + 5s + 2s^2 + s^3, \quad P_4(s) = 1 + 5s + 3s^2 + s^3$$

устойчивы, поэтому всё рассматриваемое семейство устойчиво.

Пример 30. Рассмотрим множество матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}, \quad b \in [-3; -2] \ \ c \in [-2; -1] \ \ d \in [-1; 0].$$

Выясним, можно ли утверждать, что при любых указанных значениях b, c, d система $\dot{x} = Ax$ будет асимптотически устойчива.

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + (b + d - 1)\lambda^2 + (b + c + d - bd)\lambda + 2c - bd$$

Требуется исследовать устойчивость интервального многочлена $\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, где

$$a_2 = 1 - b - d \in [3; 5], \ \ a_1 = bd - b - c - d \in [3; 9] \ \ a_0 = bd - 2c \in [2; 7]$$

[...]

#

На основе теоремы Харитонова можно построить ряд методов робастной стабилизации. Так, применив критерий Найквиста [...]

Также справедлива

Теорема 10. Пусть регулятор с передаточной функцией вида

$$C(s) = \frac{f_0 + f_1 s}{g_0 + g_1 s}$$

стабилизирует все 16 возможных комбинаций

$$H_{ij}(s) = \frac{P_i(s)}{Q_j(s)}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

где $P_i(s)$ и $Q_j(s)$ — харитоновские многочлены интервальных многочленов $\mathcal{A}(s)$ и $\mathcal{B}(s)$. Тогда $C(s)$ стабилизирует все системы с передаточными функциями

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s)},$$

где $A(s)$ и $B(s)$ принадлежат интервальным многочленам $\mathcal{A}(s)$ и $\mathcal{B}(s)$.

Замечание. Аналогичное утверждение для произвольного регулятора неверно.

Теорема о малом коэффициенте усиления

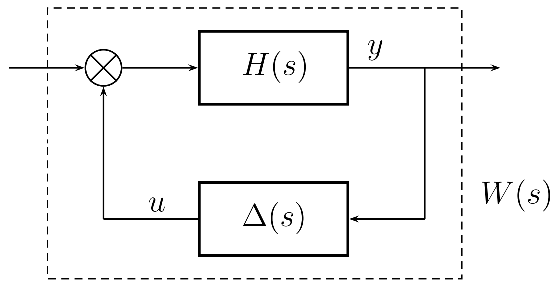
Через $\mathcal{RH}_\infty$ будем обозначать множество дробно-рациональных передаточных функций с устойчивым знаменателем.

Теорема 11. *(о малом коэффициенте усиления)* Пусть $H(s) \in \mathcal{RH}_\infty$. Матрицы $(E - H(s)\Delta(s))^{-1}$ и $(E - \Delta(s)H(s))^{-1}$ определены и принадлежат $\mathcal{RH}_\infty$ при всех

$$\Delta \in \mathcal{RH}_\infty, \quad \|\Delta(s)\|_\infty \leqslant \frac{1}{\gamma} \tag{34}$$

тогда и только тогда, когда $\|H(s)\|_\infty \leqslant \gamma$.

Рассмотрим систему с неопределённостью в контуре обратной связи:



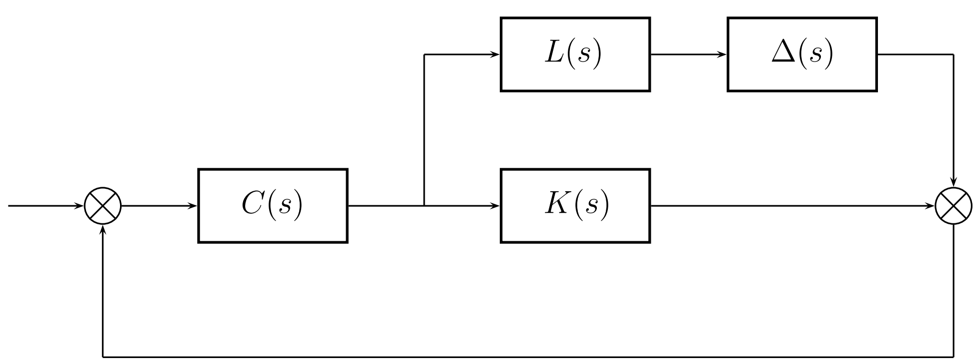
Здесь $H(s)$ — передаточная функция известной части, а $\Delta(s)$ — неопределённой части системы. Напомним, что передаточная функция замкнутой системы

$$W(s) = H(s)(E - \Delta(s)H(s))^{-1} = (E - H(s)\Delta(s))^{-1}H(s).$$

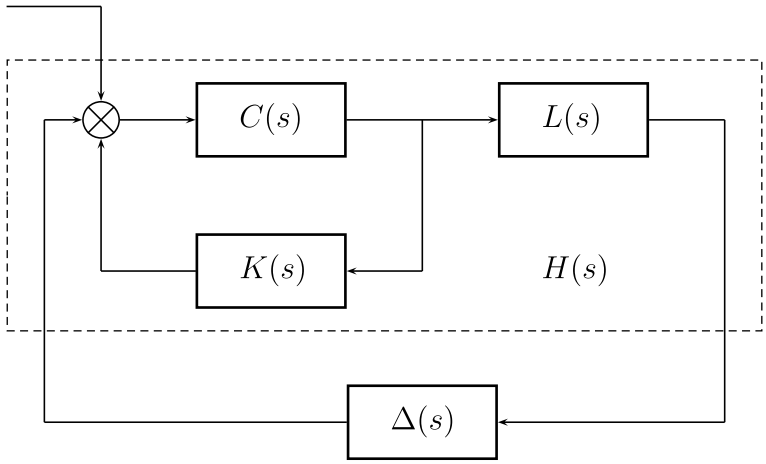
В силу этого устойчивость знаменателей $H(s)$ и $(E - H(s)\Delta(s))^{-1}$ влечёт $W(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, т.е. устойчивость замкнутой системы.

Замечание. Положительную обратную связь можно заменить на отрицательную, поскольку $\|-\Delta(s)\|_\infty = \|\Delta(s)\|_\infty$.

Покажем технику применения теоремы 11 для исследования робастной устойчивости. Рассмотрим систему с аддитивной неопределённостью:



Перерисуем блок-схему:



Теперь ясно, что

$$H(s) = L(s)C(s)\left(E - K(s)C(s)\right)^{-1}$$

и можно применить теорему 11. Тогда условие робастной устойчивости при выполнении (34) для системы с аддитивной неопределённостью примет вид

$$\|L(s)C(s)\left(E - K(s)C(s)\right)^{-1}\|_\infty \leqslant \gamma.$$