1 Некоторые предварительные сведения

Напомним некоторые сведения из линейной алгебры и теории устойчивости. Квадратную матрицу A называют

- *устойчивой* или *гурвицевой*, если все её собственные числа имеют отрицательные вещественные части;
- *симметричной*, если $A^T = A$;
- *отрицательно определённой*, если она симметрична и $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0\ \ x^T A x < 0$;
- *положительно определённой*, если она симметрична и $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0\ \ x^T A x > 0$.

Все собственные числа вещественной симметричной матрицы вещественны. Симметричная матрица является положительно (отрицательно) определённой тогда и только тогда, когда все её собственные числа положительны (отрицательны).

Далее факт положительной определённости матрицы A будем обозначать так:

$$A > 0,$$

а факт отрицательной определённости — так:

$$A < 0.$$

Иногда вводятся и нестрогие матричные неравенства. Неравенство $A \geqslant 0$ означает, что $\forall x \in \mathbb{R}^n\ \ x^T A x \geqslant 0$, а $A \leqslant 0$ — что $\forall x \in \mathbb{R}^n\ \ x^T A x \leqslant 0$.

Докажем некоторые свойства знакоопределённых матриц, необходимые для дальнейшего изложения. Если не указано обратное, далее P, Q и R будут обозначать квадратные симметричные матрицы одного порядка n, A — произвольную квадратную матрицу того же порядка, x — вектор из $\mathbb{R}^n$.

1. $P > 0\ \Rightarrow\ -P < 0;\quad P < 0\ \Rightarrow\ -P > 0.$

   ◀ Доказательство очевидно из определения:

   $$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0\ \ x^T P x > 0\ \Rightarrow\ x^T(-P)x = -x^T P x < 0. \quad ▶$$

   Это свойство позволяет в матричных неравенствах переносить слагаемые из одной части неравенства в другую с заменой знака. Неравенство $P > Q$ далее будем понимать в том же смысле, что и $P - Q > 0$ или $Q - P < 0$. Заметим также, что благодаря этому свойству можно все свойства, перечисленные ниже, переформулировать для отрицательно определённых матриц.

2. $P > Q,\ \ Q > R\ \Rightarrow\ P > R.$

   ◀ $P > Q\ \Rightarrow\ P - Q > 0\ \Rightarrow \forall x \neq 0\ \ x^T(P - Q)x > 0\ \ x^T P x > x^T Q x$. Аналогично $x^T Q x > x^T R x$, поэтому $x^T P x > x^T R x$. ▶

3. $P > 0,\ \ Q > 0,\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda > 0,\ \mu > 0\ \Rightarrow\ \lambda P + \mu Q > 0.$

   ◀ $\forall x \neq 0\ \ x^T(\lambda P + \mu Q)x = \lambda x^T P x + \mu x^T Q x > 0.$ ▶

4. Для любой матрицы A выполняется $A^T A \geqslant 0$; если A квадратная и $\det A \neq 0$, то $A^T A > 0$.

   ◀ Для любого x
   $$x^T(A^T A)x = (x^T A^T)(Ax) = (Ax)^T(Ax) = \|Ax\|^2 \geqslant 0,$$
   где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Если $\det A \neq 0$, то СЛАУ $Ax = 0$ имеет только нулевое решение, поэтому $\forall x \neq 0$ $\|Ax\|^2 > 0$. ▶

5. Если $\det A \neq 0$, то $P > 0 \ \Leftrightarrow\ A^T P A > 0$.

   ◀ Во-первых, заметим, что $A^T P A$ симметрична:
   $$(A^T P A)^T = A^T P^T (A^T)^T = A^T P A.$$
   Во-вторых, если A невырожденна, то $x^T(A^T P A)x$ получается из квадратичной формы $x^T P x$ при помощи линейной замены переменных:
   $$x^T(A^T P A)x = (Ax)^T P(Ax) = y^T P y,$$
   причём $y = Ax = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$, поэтому матрицы $A^T P A$ и P имеют одинаковую знакоопределённость. ▶

6. Если $P > 0$, то $\exists P^{-1} > 0$.

   ◀ Во-первых, заметим, что если $P > 0$, то P невырожденна. Действительно, все собственные числа P положительны, поэтому характеристическое уравнение $\det(P - \lambda E) = 0$ имеет только положительные корни, значит, $\det(P) = \det(P - 0\cdot E) \neq 0$. Тогда $\exists P^{-1}$ и она симметрична:
   $$(P^{-1})^T = (P^T)^{-1} = P^{-1}.$$
   Получаем
   $$x^T P^{-1} x = x^T(P^{-1} P P^{-1})x = (x^T P^{-1})P(P^{-1}x) = (P^{-1}x)^T P(P^{-1}x)$$
   причём $P^{-1}x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$, поэтому $(P^{-1}x)^T P(P^{-1}x) > 0$ при всех ненулевых x. ▶

7. Пусть $P_1, \ldots, P_k$ — квадратные симметричные матрицы (вообще говоря, разного порядка). Блочная матрица
   $$\tilde{P} = \operatorname{diag}(P_1, \ldots, P_k) = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & P_k \end{pmatrix}$$
   положительно определена тогда и только тогда, когда положительно определены все матрицы $P_1, \ldots, P_k$.

   ◀ Чтобы показать справедливость утверждения, рассмотрим «составную» квадратичную форму
   $$\tilde{x}^T \tilde{P} \tilde{x} = x_1^T P_1 x_1 + x_2^T P_2 x_2 + \ldots + x_k^T P_k x_k,$$
   где $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)^T$. Если все формы $x_1^T P_1 x_1, \ldots, x_k^T P_k x_k$ положительно определены, то для любого ненулевого $\tilde{x}$ все они положительны и $\tilde{x}^T \tilde{P} \tilde{x} > 0$. Если хотя бы одна из них, например, P_1, не положительно определена, то существует столбец $x_1^* \neq 0$ такой, что $(x_1^*)^T P_1 x_1^* \leqslant 0$. Возьмём в качестве аргумента столбец $x^* = (x_1^*, 0, \ldots, 0)^T$; тогда
   $$(x^*)^T \tilde{P} x^* = (x_1^*)^T P_1 x_1^* + 0 + \ldots + 0 \leqslant 0,$$
   то есть «составная» квадратичная форма не будет положительно определённой. ▶

8. Пусть $B \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, M — симметричная блочная матрица

$$M = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix}, \quad B^T = B,\ D^T = D.$$

Тогда $M > 0$ в том и только в том случае, если $D > 0$ и *дополнение Шура* $S = B - CD^{-1}C^T > 0$.

◀ По свойству 5 неравенство $M > 0$ эквивалентно неравенству $U^T M U > 0$, где U — произвольная квадратная невырожденная матрица. Выберем

$$U = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -D^{-1}C^T & E_n \end{pmatrix},$$

где E_m и E_n — единичные матрицы порядков m и n. Тогда

$$U^T M U = \begin{pmatrix} E_m & -CD^{-1} \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -D^{-1}C^T & E_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B - CD^{-1}C^T & 0 \\ C^T & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -D^{-1}C^T & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B - CD^{-1}C^T & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

По свойству 7 $U^T M U > 0$ тогда и только тогда, когда $B - CD^{-1}C^T > 0$ и $D > 0$. ▶

Замечание. Строгие неравенства в условиях $M > 0$ и $B - CD^{-1}C^T > 0$ (но не $D > 0$!) можно заменить нестрогими.

9. *Отношение Рэлея:*

$$\forall x \neq 0 \quad \lambda_{min}(P) \leqslant \frac{x^T P x}{x^T x} \leqslant \lambda_{max}(P),$$

где $\lambda_{min}(P)$ и $\lambda_{max}(P)$ — наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы P.

◀ Любую симметричную P можно привести к диагональному виду ортогональным преобразованием:

$$P = U^T D U, \quad UU^T = E,\ \ D = \mathrm{diag}(\lambda_{min}, \ldots, \lambda_{max})$$

(расположим собственные числа на диагонали D в порядке возрастания). Тогда

$$Q(x) = x^T P x = (Ux)^T D (Ux).$$

Сделаем линейную замену $y = Ux$; тогда

$$\hat{Q}(y) = y^T D y = \lambda_{min} y_1^2 + \ldots + \lambda_{max} y_n^2.$$

Отсюда очевидно, что

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \lambda_{min}\|y\|^2 \leqslant \hat{Q}(y) \leqslant \lambda_{max}\|y\|^2, \quad \|y\|^2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2.$$

Осталось заметить, что ортогональное преобразование сохраняет норму, поэтому $\|y\| = \|x\|$; формы $Q(x)$ и $\hat{Q}(y)$ по значениям совпадают, поэтому

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \lambda_{min}\|x\|^2 \leqslant Q(x) \leqslant \lambda_{max}\|x\|^2. \ ▶$$

Упражнение. Докажите, что свойства 1,2,3,5 и 7 справедливы для нестрогих матричных неравенств.

2 Линейные матричные неравенства

Линейным матричным неравенством относительно переменных $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ называется условие

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0, \tag{1}$$

где $F_0, \dots, F_m$ — заданные симметричные матрицы одного порядка n. Заметим, что знак $>$ в (1) можно заменить на $<$, умножив левую часть на -1.

Набор $x_1, \dots, x_m$, удовлетворяющий неравенству (1), называют его *решением*.

На практике запись (1) бывает не очень удобной. Обычно линейные матричные неравенства записывают в матричных переменных. Это означает, что скалярные величины $x_1, \dots, x_m$ рассматриваются как элементы некоторых матриц, а $F(x)$ — как функция от этих матриц.

Пример 1. Неравенство

$$A^T X + XA + B > 0,$$

где A — некоторая квадратная матрица, B — известная симметричная матрица, а X — неизвестная симметричная матрица, является линейным матричным неравенством. Во-первых, матрица в левой части симметрична:

$$(A^T X + XA + B)^T = X^T A + A^T X + B^T = XA + A^T X + B;$$

во-вторых, сумма $A^T X + XA$ линейна по каждому элементу матрицы X.

Покажем, как можно записать конкретное неравенство в виде (1). Пусть, например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^T X + XA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 2x_1 - x_2 & 2x_2 - x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & 2x_1 - x_2 \\ x_2 & 2x_2 - x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3.$$

Замечание. Матрицы F_1, F_2, F_3 получились симметричными не случайно. Как мы уже сказали, матрица $A^T X + XA$ симметрична для любого X, в том числе для таких матриц X_i, у которых все элементы, кроме одного x_i, равны нулю (с учётом симметричности). Тогда $F_i = A^T X_i + X_i A$ тоже симметричны. Таким образом, проверять отдельно симметричность всех матриц $F_1, \dots, F_n$ не нужно, достаточно проверить симметричность $F(x)$ при всех x.

Пример 2. Неравенство

$$A + BX < 0$$

не является линейным матричным неравенством даже при симметричных A, B и X, поскольку

$$(A + BX)^T = A^T + X^T B^T = A + XB;$$

но, вообще говоря, $BX \neq XB$.

Замечание. Систему из двух или более линейных матричных неравенств

$$\left\{\begin{array}{lcl} F_1(x) & > & 0 \\ F_2(x) & > & 0 \\ & \vdots & \\ F_k(x) & > & 0 \end{array}\right.$$

можно по свойству 7 свести к одному неравенству $F(x) > 0$, где

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_k \end{pmatrix}.$$

3 Основные задачи, связанные с линейными матричными неравенствами

Одной из наиболее важных задач, связанных с линейными матричными неравенствами, является *задача выполнимости*. Сформулировать её можно следующим образом: для линейного матричного неравенства (1) требуется найти хотя бы одно решение или убедиться, что таких решений не существует.

Пример 3. Рассмотрим задачу об устойчивости линейной стационарной системы

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ A \in M_n(\mathbb{R}) \tag{2}$$

с точки зрения теории линейных матричных неравенств. Как известно, система (2) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда существует функция Ляпунова в виде положительно определённой квадратичной формы $V(x) = x^T P x$ такой, что форма

$$\dot{V}\Big|_{(2)} = x^T(A^T P + PA)x$$

отрицательно определена. Задача поиска функции Ляпунова есть не что иное, как задача выполнимости для системы линейных матричных неравенств

$$\left\{\begin{array}{lcl} P & > & 0 \\ A^T P + PA & < & 0 \end{array}\right.$$

или (см. пред. главу) $F(P) > 0$, где

$$F(P) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -A^T P - PA \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Задачу *об одновременной устойчивости* линейных систем

$$\dot{x} = A_1 x, \ \dots, \ \dot{x} = A_k x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ A_i \in M_n(\mathbb{R}), \ i \in 1 \dots k \tag{3}$$

сформулируем так: существует ли одна на все системы (3) функция Ляпунова $V(x) = x^T P x$? Ответ на этот вопрос можно дать, решив задачу выполнимости для СЛМН

$$\left\{\begin{array}{lcl} P & > & 0 \\ A_1^T P + PA_1 & < & 0 \\ & \vdots & \\ A_k^T P + PA_k & < & 0. \end{array}\right.$$

В некоторых случаях возникают также следующие задачи:

- задача оптимизации линейной функции $c^T x$, где c — постоянный столбец, при условии $F(x) > 0$;
- *проблема собственных чисел*: найти наименьшее λ такое, что
$$\lambda E - F(x) > 0, \quad G(x) > 0;$$
- *обобщённая проблема собственных чисел*: найти наименьшее λ такое, что
$$\lambda H(x) - F(x) > 0, \quad G(x) > 0;$$
- *задача максимизации определителя*:
$$c^T x + \ln\det G(x)^{-1} \to \min, \quad F(x) > 0, \quad G(x) > 0$$

(здесь $F(x)$, $G(x)$ $H(x)$ — симметричные матрицы, E — единичная матрица, λ — скаляр). Неравенства в условиях могут быть и нестрогими.

Пример 5. Наименьшее γ такое, что
$$A \leqslant \gamma E, \quad A^T = A, \tag{4}$$
совпадает с максимальным собственным числом A. Действительно, из соотношений Рэлея
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x^T A x \leqslant \lambda_{max} \|x\|^2 = x^T \left(\lambda_{max} E\right) x,$$
где λ_{max} — наибольшее собственное число A. При этом равенство обязательно выполняется для собственного вектора A, соответствующего λ_{max}, поэтому заменить неравенство на строгое нельзя.

Заметим, что если (4) выполняется для какого-то γ, то $\lambda_{max} \leqslant \gamma$.

Пример 6. Рассмотрим задачу наименьших квадратов
$$\|Ax - b\|^2 \to \min, \quad A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \;\; b \in \mathbb{R}^m. \tag{5}$$
Перепишем (5) в виде
$$(Ax - b)^T (Ax - b) \leqslant \lambda, \quad \lambda \to \min$$
или, поскольку $\lambda > 0$,
$$(Ax - b)^T \frac{1}{\lambda} (Ax - b) \leqslant 1, \quad \lambda \to \min$$
или
$$1 - (Ax - b)^T \left(\frac{1}{\lambda} E\right) (Ax - b) \geqslant 0, \quad \lambda \to \min .$$
Теперь применим дополнение Шура, чтобы получить линейное матричное неравенство:
$$\begin{pmatrix} 1 & (Ax - b)^T \\ Ax - b & \lambda E \end{pmatrix} \geqslant 0.$$
Осталось записать то, что мы получили, в виде обобщённой задачи на собственные значения:
$$\lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -(Ax - b)^T \\ -Ax - b & 0 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

4 Стабилизация линейных систем

Рассмотрим управляемую линейную стационарную систему с управлением

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ A \in M_n(\mathbb{R}),\ B \in M_{n\times m}(\mathbb{R}). \tag{6}$$

Система (6), замкнутая управлением $u = -Kx$, $K \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, будет асимптотически устойчива в том случае, если для замкнутой системы существует функция Ляпунова $V(x) = x^T Px$, то есть СЛМН

$$\left\{ \begin{array}{ccc} P & > & 0 \\ (A-BK)^T P + P(A-BK) & < & 0. \end{array} \right. \tag{7}$$

имеет решение. Проблема в том, что (7) не является линейным матричным неравенством, поскольку содержит произведения неизвестных матриц P и K. Сделаем в (7) замену переменной $Q = P^{-1}$:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} Q & > & 0 \\ (A-BK)^T Q^{-1} + Q^{-1}(A-BK) & < & 0. \end{array} \right.$$

Умножим второе неравенство слева на $Q^T = Q$ и справа на Q:

$$Q(A-BK)^T + (A-BK)Q < 0$$

$$QA^T + AQ - QK^T B^T - BKQ < 0.$$

Теперь можно ввести новую переменную $Y = KQ$:

$$QA^T + AQ - Y^T B^T - BY < 0. \tag{8}$$

Неравенство (8) уже является линейным. Решив задачу выполнимости для системы

$$\left\{ \begin{array}{ccc} Q & > & 0 \\ QA^T + AQ - Y^T B^T - BY & < & 0. \end{array} \right. \tag{9}$$

можно найти $P = Q^{-1}$, $K = YP$.

Для решений асимптотически устойчивой линейной системы $\dot{x} = Ax$ с начальными условиями $x(0) = x_0$ справедлива оценка

$$\|x(t)\| \leqslant \gamma e^{-\sigma t}\|x_0\|,$$

где γ и σ — некоторые числа. Точная верхняя грань σ для всех таких оценок называется *степенью затухания* системы. Из теории устойчивости известно, что степень затухания равна вещественной части собственного числа A с наибольшей вещественной частью.

Потребуем теперь дополнительно, чтобы замкнутая система

$$\dot{x} = (A-BK)x \tag{10}$$

имела степень затухания не менее σ, то есть для каждого решения (10) с начальными условиями $x(0) = x_0$ была справедлива оценка $\|x(t)\| \leqslant \gamma e^{-\sigma t}\|x_0\|$, где γ — некоторое число. Покажем, что для выполнения наших требований второе неравенство в (7) надо заменить на

$$(A-BK)^T P + P(A-BK) < -2\sigma P. \tag{11}$$

Неравенство (11) означает, что

$$\forall x \neq 0 \quad x^T \left((A-BK)^T P + P(A-BK)\right) x = \dot V(x)\Big|_{(10)} < -2\sigma x^T P x = -2\sigma V(x). \tag{12}$$

Дифференциальное неравенство $\dot V(x)\Big|_{(10)} \leqslant -2\sigma V(x)$ можно проинтегрировать как обычное дифференциальное уравнение относительно $V(x)$. Действительно, обозначив $v(t) = V(x(t))$, получим

$$\frac{\dot v(t)}{v(t)} \leqslant -2\sigma$$

($v(t) > 0$ для всех решений, кроме нулевого)

$$\int\limits_0^t \frac{\dot v(\tau)}{v(\tau)}\, d\tau \leqslant -2\sigma t \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{V(x(0))}^{V(x(t))} \frac{dv}{v} \leqslant -2\sigma t \quad \Rightarrow \quad \ln V(x(t)) - \ln V(x(0)) \leqslant -2\sigma t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V(x) \leqslant V(x(0)) e^{-2\sigma t}.$$

Из соотношений Рэлея

$$\lambda_{min}(P)\|x\|^2 \leqslant x^T P x \leqslant x_0^T P x_0 e^{-2\sigma t} \leqslant \lambda_{max}(P)\|x_0\|^2 e^{-2\sigma t}$$

и

$$\|x\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}}\|x_0\| e^{-\sigma t}.$$

Теперь применим к (11) те же действия, что и к исходному неравенству (7). Умножим

$$(A-BK)^T P + P(A-BK) + 2\sigma P < 0$$

слева и справа на $Q = P^{-1}$:

$$Q(A-BK)^T + (A-BK)Q + 2\sigma Q < 0$$

и введём новую переменную $Y = KQ$:

$$QA^T + AQ - Y^T B^T - BY + 2\sigma Q < 0. \tag{13}$$

Вспомним теперь задачу стабилизации по выходу. Как мы видели ранее, эта задача сводится к двум отдельным подзадачам: обеспечению устойчивости матриц $A - BK$ и $A - FC$ подбором матриц K и F. Выше описано, как с помощью линейных матричных неравенств найти K; покажем теперь, как найти F. Требуется

$$\left\{ \begin{array}{rcl} R & > & 0 \\ (A-FC)^T R + R(A-FC) & < & 0; \end{array} \right. \tag{14}$$

второе неравенство запишем как

$$A^T R + RA - C^T F^T R - RFC < 0.$$

Здесь не нужно домножать левую часть неравенства на R^{-1}, поскольку можно просто сделать замену переменной $S = RF$ и получить

$$\left\{ \begin{array}{rcl} R & > & 0 \\ A^T R + RA - C^T S^T - SC & < & 0. \end{array} \right.$$

Объединяя эту систему с (9), получим

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Q & > & 0 \\ QA^T + AQ - Y^T B^T - BY & < & 0 \\ R & > & 0 \\ A^T R + RA - C^T S^T - SC & < & 0. \end{array} \right. \tag{15}$$

5 Линейно-квадратичный регулятор

Пусть имеется асимптотически устойчивая линейная стационарная система без управления (2). Попытаемся для каждого решения с начальным условием $x(0) = x_0$ оценить значение функционала

$$J = \int\limits_0^{+\infty} x^T(t) R x(t)\, dt, \quad R^T = R,\ R > 0.$$

Потребуем, чтобы для нашей системы существовала функция Ляпунова $V(x) = x^T P x$, причём

$$\forall x \neq 0 \quad \dot{V}\Big|_{(2)} = x^T (A^T P + PA) x < -x^T R x. \tag{16}$$

Это требование выполняется тогда и только тогда, когда существует решение СЛМН

$$\left\{ \begin{array}{lcl} P & > & 0 \\ A^T P + PA + R & < & 0. \end{array} \right. \tag{17}$$

Тогда проинтегрировав обе части (16) от 0 до $+\infty$, получим

$$\int\limits_0^{+\infty} \dot{V}\Big|_{(2)}\, dt < -\int\limits_0^{+\infty} x^T(t) R x(t)\, dt;$$

при этом по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_0^{+\infty} \dot{V}\Big|_{(2)}\, dt = V(x(t))\big|_0^{+\infty} = 0 - V(x(0)) = -x_0^T P x_0.$$

В результате

$$-x_0^T P x_0 < -\int\limits_0^{+\infty} x^T(t) R x(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^{+\infty} x^T(t) R x(t)\, dt < x_0^T P x_0.$$

Рассмотрим теперь систему с управлением (6). Будем для каждого решения с начальным условием $x(0) = x_0$ оценивать функционал

$$J = \int\limits_0^{+\infty} x^T L x + u^T S u \, dt, \quad L = H^T H, \; L \geqslant 0, \; S^T = S, \; S > 0.$$

Управление будем, как обычно, искать в виде $u = -Kx$; тогда

$$J = \int\limits_0^{+\infty} x^T R x \, dt, \quad R = H^T H + K^T S K.$$

Запишем теперь условие (17) для замкнутой системы:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P & > & 0 \\ (A - BK)^T P + P(A - BK) + H^T H + K^T S K & < & 0. \end{array} \right. \tag{18}$$

Повторим с (18) те же действия, что и для СЛМН в задаче стабилизации. Сделаем замену переменной $Q = P^{-1}$ и умножим второе неравенство слева на $Q^T = Q$ и справа на Q:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Q & > & 0 \\ Q(A - BK)^T + (A - BK)Q + QH^T HQ + QK^T SKQ & < & 0. \end{array} \right.$$

Теперь сделаем замену $Y = KQ$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Q & > & 0 \\ QA^T + AQ - BY - Y^T B^T + QH^T HQ + Y^T SY & < & 0. \end{array} \right.$$

Второе неравенство можно записать в виде

$$QA^T + AQ - BY - Y^T B^T + \begin{pmatrix} QH^T & Y^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} HQ \\ Y \end{pmatrix} < 0$$

Тогда к нему можно применить дополнение Шура:

$$\begin{pmatrix} QA^T + AQ - BY - Y^T B^T & QH^T & Y^T \\ HQ & -E & 0 \\ Y & 0 & -S^{-1} \end{pmatrix} < 0. \tag{19}$$

Условие (19) уже является линейным матричным неравенством. Если найти удовлетворяющие ему и условию $Q > 0$ неизвестные матрицы, выразить через них коэффициент при управлении K и замкнуть исходную систему управлением $u = -Kx$, то для замкнутой системы будет выполняться (16). Это влечёт, как мы помним, справедливость оценки

$$J = \int\limits_0^{+\infty} x^T R x \, dt = \int\limits_0^{+\infty} x^T L x + u^T S u \, dt < x_0^T P x_0.$$

Пусть теперь требуется, чтобы значение функционала J не превосходило некоторого значения γ. Это требование будет удовлетворяться при

$$x_0^T P x_0 = x_0^T Q^{-1} x_0 < \gamma. \tag{20}$$

Условие (20) можно записать в виде

$$\gamma - x_0^T Q^{-1} x_0 > 0;$$

в этом виде легко разглядеть дополнение Шура

$$\begin{pmatrix} \gamma & x_0^T \\ x_0 & Q \end{pmatrix} > 0.$$

Таким образом, СЛМН для поиска стабилизирующего управления, удовлетворяющего условию ограниченности функционала $J < \gamma$ для конкретного решения с начальным условием $x(0) = x_0$ имеет вид

$$Q > 0, \quad \begin{pmatrix} QA^T + AQ - BY - Y^T B^T & QH^T & Y^T \\ HQ & -E & 0 \\ Y & 0 & -S^{-1} \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} \gamma & x_0^T \\ x_0 & Q \end{pmatrix} > 0. \tag{21}$$

Можно, немного изменив предъявляемые к функционалу требования, записать аналогичное (21) условие без x_0. Будем требовать, чтобы для любых начальных условий $x(0) = x_0$ выолнялось

$$J < \delta \|x_0\|^2, \tag{22}$$

где δ — некоторая константа. Для выполнения (22) достаточно

$$x_0^T P x_0 < \delta \|x_0\|^2 = \delta x_0^T x_0;$$

это условие эквивалентно ЛМН

$$P < \delta E$$

или

$$\delta E - P > 0.$$

Последнее неравенство с помощью дополнения Шура приводится к виду

$$\begin{pmatrix} \delta E & E \\ E & Q \end{pmatrix} > 0.$$

6 H_∞-норма и H_∞-оптимизация

Рассмотрим систему с выходом

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Dw, \\ y &= Cx \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ w \in \mathbb{R}^k,\ y \in \mathbb{R}^l \tag{23}$$

с начальными условиями $x(0) = 0$, $w(t)$ — вход с ограниченной L_2-нормой. Покажем, как можно вычислить H_∞-норму такой системы.

Потребуем, чтобы для (23) существовала функция Ляпунова $V(x) = x^T P x$, $P > 0$, такая, что

$$\dot{V}\Big|_{(23)} \leqslant -y^T y + \gamma^2 w^T w, \tag{24}$$

где γ — некоторое положительное число. Проинтегрируем обе части (24) от 0 до $+\infty$:

$$\int\limits_0^{+\infty} \dot{V}\Big|_{(23)} dt = -\int\limits_0^{+\infty} y^T y\, dt + \gamma^2 \int\limits_0^{+\infty} w^T w\, dt = -\|y\|_2^2 + \gamma^2 \|w\|_2^2.$$

Вследствие того, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \dot{V}\Big|_{(23)} dt = \lim_{t\to+\infty} V(x(t)) - V(x(0)) = 0 - 0 = 0,$$

имеем

$$0 \leqslant -\|y\|_2^2 + \gamma^2 \|w\|_2^2$$

или

$$\frac{\|y\|_2}{\|w\|_2} \leqslant \gamma. \tag{25}$$

Таким образом, выполнение условия (24) означает, что H_∞-норма нашей системы не превышает γ.

Теперь переформулируем (24) в виде линейного матричного неравенства. С учётом того, что

$$\dot{V}(x(t)) = (Ax + Dw)^T Px + x^T P(Ax + Dw) = x^T A^T Px + x^T PAx + w^T D^T Px + x^T PDw$$

условие (24) можно записать в виде

$$x^T A^T Px + x^T PAx + w^T D^T Px + x^T PDw \leqslant -(Cx)^T(Cx) + \gamma^2 w^T w$$

или

$$\begin{pmatrix} x^T & w^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T P + PA + C^T C & PD \\ D^T P & -\gamma^2 E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \leqslant 0$$

или

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA + C^T C & PD \\ D^T P & -\gamma^2 E \end{pmatrix} \leqslant 0. \tag{26}$$

Условие (26) является линейным матричным неравенством относительно P. Его выполнение (вместе с условием $P > 0$) гарантирует оценку (25). Перебирая различные положительные γ, можно найти наименьшее значение, при котором (26) выполнимо. Можно доказать, что в случае, когда исходная система (23) управляема и наблюдаема, эта наименьшая оценка и есть H_∞-норма системы (23).

Теперь рассмотрим систему с двумя входами

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Ax + Bu + Dw \\ y & = & Cx, \end{array} \right. \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ w \in \mathbb{R}^k,\ y \in \mathbb{R}^l,\ x(0) = 0, \tag{27}$$

где $w(t)$ — вход с ограниченной L_2-нормой, u — управление, которое будем искать в виде $u = -Kx$. Попытаемся найти такую матрицу K, что замкнутая система

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & (A - BK)x + Dw \\ y & = & Cx \end{array} \right. \tag{28}$$

будет асимптотически устойчивой и иметь наименьшую H_∞-норму. Подставив $A - BK$ в (26), получим

$$\begin{pmatrix} (A-BK)^TP + P(A-BK) + C^TC & PD \\ D^TP & -\gamma^2 E \end{pmatrix} \leqslant 0. \tag{29}$$

Применив к (29) дополнение Шура, получим *неравенство Риккати*

$$(A-BK)^TP + P(A-BK) + C^TC + \frac{1}{\gamma^2}PDD^TP \leqslant 0.$$

Умножим его левую часть слева и справа на матрицу $Q = P^{-1}$:

$$Q(A-BK)^T + (A-BK)Q + QC^TCQ + \frac{1}{\gamma^2}DD^T \leqslant 0.$$

Теперь снова применим лемму Шура, но в обратном направлении:

$$\begin{pmatrix} Q(A-BK)^T + (A-BK)Q + \frac{1}{\gamma^2}DD^T & QC^T \\ CQ & -E \end{pmatrix} \leqslant 0$$

и введём новую матричную пременную $Y = KQ$:

$$\begin{pmatrix} QA^T + AQ - Y^TB^T - BY + \frac{1}{\gamma^2}DD^T & QC^T \\ CQ & -E \end{pmatrix} \leqslant 0. \tag{30}$$

Условие (30) является линейным матричным неравенством относительно Q и Y. Решив его и вычислив $K = YQ^{-1}$, можно получить стабилизирующее управление, обеспечивающее оценку (25).

Таким образом, что задачу H_∞-оптимизации можно сформулировать в виде обобщённой задачи на собственные числа: требуется найти наименьшее γ такое, что

$$\begin{pmatrix} QA^T + AQ - Y^TB^T - BY & QC^T \\ CQ & -E \end{pmatrix} + \frac{1}{\gamma^2}\begin{pmatrix} DD^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leqslant 0, \quad Q > 0.$$

7 Квадратичная устойчивость

Выпуклой оболочкой системы векторов $x_1, \ldots, x_k$ некоторого линейного пространства L называется множество

$$\operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i : \ \alpha_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\}.$$

Элементы выпуклой оболочки $\operatorname{conv}(x_1, \ldots, x_k)$ называют *выпуклыми комбинациями* $x_1, \ldots, x_k$.

Пример 7. Выпуклой оболочкой матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \ \text{ и } \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

является подмножество

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 2 \end{pmatrix}, \ k \in [-1, 2] \right\}$$

множества кадратных матриц порядка 2.

Пример 8. Выпуклой оболочкой матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \text{ и } \ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

будет множество

$$\Omega = \operatorname{conv}(A_1, A_2, A_3) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_3 & -\alpha_3 \end{pmatrix},\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, 3,\ \ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \right\}.$$

Учитывая тот факт, что $\alpha_2 + \alpha_3 = 1 - \alpha_1$, можно записать

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 - \alpha_1 \\ \alpha_3 & -\alpha_3 \end{pmatrix},\ \alpha_1 \geqslant 0,\ \alpha_3 \geqslant 0,\ \alpha_1 + \alpha_3 \leqslant 1 \right\}.$$

Теорема 1. (о выпуклости множества решений СЛМН) Пусть для матриц $A_1, \ldots, A_k \in M_n(\mathbb{R})$ справедливо линейное матричное неравенство $F(x) > 0$. Тогда оно выполняется для всех $A \in \operatorname{conv}(A_1, \ldots, A_k)$.

Теорема 2. Пусть $A_1, \ldots, A_k \in M_n(\mathbb{R})$, $A(t)$ — такая непрерывная матричная функция, что $\forall t \geqslant 0\ \ A(t) \in \operatorname{conv}(A_1, \ldots, A_k)$. Если существует симметричная матрица P, удовлетворяющая системе неравенств

$$\left\{ \begin{array}{ccc} P & > & 0 \\ A_1^T P + P A_1 & < & 0 \\ & \vdots & \\ A_k^T P + P A_k & < & 0, \end{array} \right. \tag{31}$$

то линейная нестационарная система

$$\dot{x} = A(t)x \tag{32}$$

экспоненциально устойчива.

◀ Пусть матрица P, удовлетворяющая (31), существует. Вследствие непрерывной зависимости собственных чисел матрицы от её коэффициентов всегда можно выбрать достаточно маленькое $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A_1^T P + P A_1 + 2\varepsilon P & < & 0 \\ & \vdots & \\ A_k^T P + P A_k + 2\varepsilon P & < & 0. \end{array} \right.$$

Рассмотрим условие $A^T P + PA + 2\varepsilon P < 0$ как линейное матричное неравенство относительно A, а не P, как ранее. По теореме 1 из выполнения неравенства

$$A^T P + PA + 2\varepsilon P < 0$$

для матриц $A_1, \ldots, A_k$ следует его выполнение для любой их выпуклой комбинации, в том числе для $A(t)$ при всех $t \geqslant 0$. Тогда для системы (32) и функции $V(x) = x^T P x$ справедливо условие

$$\forall t \geqslant 0,\ x \neq 0\ \ \dot{V}\Big|_{(32)} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A(t)^T P + A(t)P)x < -x^T 2\varepsilon P x = -2\varepsilon V(x),$$

совпадающее с условием (12). Но из (12) следует выполнение для любого начального условия $x(0) = x_0$ неравенства

$$\|x(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}} e^{-\varepsilon t} \|x_0\|,$$

где $x(t)$ — соответствующее решение (32), что означает экспоненциальную устойчивость (32). ▶

Замечание. Для экспоненциальной устойчивости всех систем (32) наличие единой функции Ляпунова является достаточным, но не необходимым условием. Возможна ситуация, когда таковой функции нет, но существуют разные функции Ляпунова для разных систем.

Пример 9. Рассмотрим множество линейных систем вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \varphi(t)x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -6x_1 - 5x_2, \end{cases} \qquad \forall t \geqslant 0 \ \ |\varphi(t)| \leqslant 1.$$

Очевидно, что

$$A(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} \in \mathrm{conv}\,(A_1, A_2)\,, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} > 0, \quad A_1^T P + PA_1 = \begin{pmatrix} -48 & -24 \\ -24 & -14 \end{pmatrix} < 0, \quad A_2^T P + PA_2 = \begin{pmatrix} -24 & -18 \\ -18 & -14 \end{pmatrix} < 0,$$

поэтому все расматриваемые системы экспоненциально устойчивы.

8 Метод глобальной линеаризации

Рассмотрим систему вида

$$\dot{x} = A(x,t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{33}$$

где $A(x,t)$ — непрерывная по t и по x матричная функция. Пусть эта система при начальных условиях $x(0) = x_0$ имеет решение $x = \tilde{x}(t)$. Оно же будет решением линейной системы

$$\dot{x} = A(\tilde{x}(t), t)x \tag{34}$$

с начальными условиями $x(0) = x_0$. Этот факт позволяет свести исследование устойчивости решений (33) к исследованию устойчивости линейных нестационарных систем (34).

Замечание. Напомним, что все решения линейных систем устойчивы или неустойчивы одновременно. Для нелинейных систем, в том числе систем вида (33), это, вообще говоря, не так. Здесь нет противоречия, поскольку разным начальным условиям для (33) соответствуют разные системы (34).

Описанный подход к нелинейным системам носит название *глобальной линеаризации.*

Теорема 3. Пусть $A_1, \ldots, A_k \in M_n(\mathbb{R})$, $A(x,t)$ — такая непрерывная матричная функция, что $\forall t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^n \quad A(x,t) \in \mathrm{conv}(A_1, \ldots, A_k)$. Если существует симметричная матрица P, удовлетворяющая системе неравенств

$$\begin{cases} \quad P & > & 0 \\ A_1^T P + PA_1 & < & 0 \\ & \vdots & \\ A_k^T P + PA_k & < & 0, \end{cases} \tag{35}$$

то нулевое решение нелинейной системы

$$\dot{x} = A(x,t)x \tag{36}$$

глобально экспоненциально устойчиво.

◀ Достаточно заметить, что в соответствии с идеей глобальной линеаризации и теоремой 2 для любого решения (36) с начальным условием $x(0) = x_0$ справедлива оценка

$$\|x(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}} e^{-\varepsilon t} \|x_0\|,$$

причём числа $\sqrt{\lambda_{max}(P)/\lambda_{min}(P)}$ и ε не зависят от x_0. ▶

Пример 10. Рассмотрим множество нелинейных систем вида

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}_1 & = & \varphi(x,t)x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -6x_1 - 5x_2,\end{array}\right. \qquad \forall t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^2\ \ |\varphi(x,t)| \leqslant 1.$$

Вспоминая пример 9, можем заключить, что по теореме 3 нулевое решение этих систем глобально экспоненциально устойчиво.

9 Квадратичная стабилизация

Рассмотрим теперь систему с управлением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \ u \in \mathbb{R}^m, \tag{37}$$

в которой *расширенная матрица системы* $S = (A(t)\ \ B(t))$ при всех $t \geqslant 0$ принадлежит выпуклой оболочке матриц $S_i = (A_i\ \ B_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Это значит, что при $t \geqslant 0$ определены функции $\alpha_i(t) \geqslant 0$ такие, что

$$A(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t)A_i, \quad B(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t)B_i, \quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) = 1, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Пример 11. Рассмотрим множество систем вида

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}_1 & = & \varphi(t)x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 + x_2,\end{array}\right. \qquad \forall t \geqslant 0\ \ |\varphi(t)| \leqslant 1.$$

Нетрудно видеть, что матрица

$$S = \left(\begin{array}{cc|c}\varphi(t) & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0\end{array}\right)$$

при $t \geqslant 0$ принадлежит выпуклой оболочке матриц

$$S_1 = \left(\begin{array}{cc|c}-1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0\end{array}\right) = (A_1|B) \ \text{ и } S_2 = \left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0\end{array}\right) = (A_2|B)\,.$$

Действительно,

$$\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 = \left(\begin{array}{cc|c}-\alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ -(\alpha_1 + \alpha_2) & \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2\end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c}1 - 2\alpha_1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1\end{array}\right);$$

при этом для какого-то конкретного t можно выбрать $\alpha_1(t) = \frac{1-\varphi(t)}{2} \in [0;1]$, $\alpha_2(t) = 1 - \alpha_1(t)$.

Пример 12. Рассмотрим множество систем вида

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}_1 & = & \varphi(t)x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 + x_2 + \psi(t)u,\end{array}\right. \qquad \forall t \geqslant 0\ \ |\varphi(t)| \leqslant 1,\ |\psi(t)| \leqslant 1.$$

Покажем, что при всех $t \geqslant 0$ матрица

$$S = \left(\begin{array}{cc|c}\varphi(t) & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \psi(t)\end{array}\right)$$

принадлежит выпуклой оболочке матриц

$$S_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array} \right) = (A_1|B_1)\,, \quad S_2 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right) = (A_1|B_2)\,,$$

$$S_3 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{array} \right) = (A_2|B_1) \ \text{ и } S_4 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right) = (A_2|B_2)\,.$$

Имеем

$$\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3 + \alpha_4 S_4 = \left(\begin{array}{cc|c} -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 \end{array} \right).$$

Для того, чтобы в момент времени t выполнялись условия

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & = & \varphi(t) \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 & = & \psi(t) \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & = & 1 \\ \alpha_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, 4, & & \end{array} \right.$$

можно выбрать α_i следующим образом:

1. Если $\varphi(t) < \psi(t)$, возьмём $\alpha_4 = \frac{1+\varphi(t)}{2}$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = \frac{\psi(t)-\varphi(t)}{2}$, $\alpha_1 = \frac{1-\psi(t)}{2}$;
2. Если $\varphi(t) = \psi(t)$, возьмём $\alpha_4 = \frac{1+\varphi(t)}{2}$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \frac{1-\varphi(t)}{2}$;
3. Если $\varphi(t) > \psi(t)$, возьмём $\alpha_4 = \frac{1+\psi(t)}{2}$, $\alpha_3 = \frac{\varphi(t)-\psi(t)}{2}$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \frac{1-\varphi(t)}{2}$.

Попытаемся найти управление вида $u = Kx$, которое будет стабилизировать все системы (37). Замкнутая этим управением система будет иметь вид

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)K)\, x. \tag{38}$$

При этом её матрица

$$A(t) + B(t)K = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) A_i + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) B_i K = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t)(A_i + B_i K)$$

принадлежит выпуклой оболочке матриц $A_i + B_i K$, $i = 1, \ldots, k$.

Если существует симметричная матрица P, удовлетворяющая системе матричных неравенств

$$\left\{ \begin{array}{ccl} P & > & 0 \\ (A_i + B_i K)^T P + P(A_i + B_i K) & < & 0, \quad i = 1, \ldots, k, \end{array} \right. \tag{39}$$

то по теореме 2 это означает экспоненциальную устойчивость всех систем (37), замкнутых нашим управлением. Над системой (39) можно проделать те же преобразования, что ранее с (8), и получить систему линейных матричных неравенств

$$\left\{ \begin{array}{ccl} Q & > & 0 \\ QA_i^T + A_i Q + Y^T B_i^T + B_i Y & < & 0, \quad i = 1, \ldots, k, \end{array} \right. \tag{40}$$

где $Q = P^{-1}$, $Y = KQ$.

Условие (39) можно интерпретировать следующим образом: для k линейных стационарных систем

$$\dot{x} = (A_i + B_i K), \quad i = 1, \ldots, k$$

должна существовать единая функция Ляпунова $V(x) = x^T P x$.

Пример 13. Рассмотрим системы из примера 11. Покажем, что управление $u = -5x_1 + 6x_2$ стабилизирует их при любых $\varphi(t)$ таких, что $|\varphi(t)| \leqslant 1$. Для систем $\dot{x} = (A_1 + BK)x$ и $\dot{x} = (A_2 + BK)x$ с матрицами

$$A_1 + BK = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } A_2 + BK = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

существует общая функция Ляпунова $V(x) = x^T P x$ с матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Действительно, $P > 0$,

$$(A_1+BK)^T P + P(A_1+BK) = \begin{pmatrix} -8 & 11 \\ 11 & -16 \end{pmatrix} < 0, \quad (A_2+BK)^T P + P(A_2+BK) = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 7 & -16 \end{pmatrix} < 0.$$

Упражнение. Докажите, что не существует управления, стабилизирующего все системы из примера 12.

Теперь распространим полученные результаты на нелинейные системы вида

$$\dot{x} = A(x,t)x + B(x,t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \; u \in \mathbb{R}^m. \tag{41}$$

Опираясь на идею метода глобальной линеаризации, можно утверждать, что если расширенная матрица $S = (A(x,t) \;\; B(x,t))$ при всех $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит выпуклой оболочке матриц $S_i = (A_i \;\; B_i)$, $i = 1, \ldots, k$, и для каких-то Q и Y выполняется система линейных матричных неравенств (40) (или, что то же самое, эквивалентное ей условие (39)), то управление $u = YQ^{-1}x$ квадратично стабилизирует систему (41).

Пример 14. Рассмотрим модифицированные системы из примера 13:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \varphi(x,t)x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2, \end{cases} \qquad \forall t \geqslant 0, \, x \in \mathbb{R}^2 \;\; |\varphi(x,t)| \leqslant 1.$$

Все такие системы стабилизируются тем же самым управлением $u = -5x_1 + 6x_2$.

10 Устойчивость и стабилизация систем с ограниченным по норме возмущением

Системой с ограниченным по норме возмущением будем называть систему вида

$$\dot{x} = (A + B\Delta(t)C)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{42}$$

где A, B, C — заданные матрицы, $\Delta(t)$ — такая непрерывная матричная функция, что

$$\forall t \geqslant 0 \quad \Delta(t)^T \Delta(t) \leqslant \alpha^2 E, \tag{43}$$

α — заданное положительное число.

Пример 15. Для системы из примера 9

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \varphi(t)x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -6x_1 - 5x_2, \end{cases} \qquad \forall t \geqslant 0 \ \ |\varphi(t)| \leqslant 1$$

можно выбрать

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta(t) = \varphi(t), \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1.$$

Пример 16. Для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= (a_{11} + \varphi(t))x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= (a_{21} + \psi(t))x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \qquad \forall t \geqslant 0 \ \ \varphi^2(t) + \psi^2(t) \leqslant \alpha^2$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = E, \quad \Delta(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 17. Для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= (a_{11} + \varphi(t))x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + (a_{22} + \psi(t))x_2, \end{cases} \qquad \forall t \geqslant 0 \ \ |\varphi(t)| \leqslant \alpha, \ \ |\psi(t)| \leqslant \alpha$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = E, \quad \Delta(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) & 0 \\ 0 & \psi(t) \end{pmatrix}, \quad C = E.$$

Упражнение. Запишите в виде (42) систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= (a_{11} + \varphi(t))x_1 + (a_{12} + \varphi(t))x_2 \\ \dot{x}_2 &= (a_{21} + \psi(t))x_1 + (a_{22} + \psi(t))x_2, \end{cases} \qquad \forall t \geqslant 0 \ \ \varphi^2(t) + \psi^2(t) \leqslant \alpha^2$$

Приведём без доказательства достаточное условие асимптотической устойчивости всех систем вида (42), удовлетворяющих условию (43).

Теорема 4. Пусть существуют симметричная матрица $Q > 0$ и число $\mu > 0$ такие, что

$$\begin{pmatrix} QA^T + AQ & \alpha QC^T & \mu B \\ \alpha CQ & -\mu E & 0 \\ \mu B^T & 0 & -\mu E \end{pmatrix} < 0. \tag{44}$$

Тогда нулевое решение системы (42) с функцией $\Delta(t)$, удовлетворяющей условию (43), глобально асимптотически устойчиво, а функция $V(x) = x^T P x$, $P = Q^{-1}$, является функцией Ляпунова для всех систем (42), (43).

Рассмотрим теперь задачу стабилизации системы с управлением с ограниченным по норме возмущением

$$\dot{x} = (A + B\Delta(t)C)x + Du, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \ u \in \mathbb{R}^m \tag{45}$$

где A, B, C, D — заданные матрицы, $\Delta(t)$ — такая непрерывная матричная функция, что выполняется условие (43). Будем искать стабилизирующее управление в виде $u = Kx$. Замкнутая система будет иметь вид

$$\dot{x} = (A + DK + B\Delta(t)C)x$$

и условие устойчивости (44) запишется как

$$\begin{pmatrix} Q(A+DK)^T + (A+DK)Q & \alpha QC^T & \mu B \\ \alpha CQ & -\mu E & 0 \\ \mu B^T & 0 & -\mu E \end{pmatrix} < 0 \tag{46}$$

или

$$\begin{pmatrix} QA^T + AQ + QK^TD^T + DKQ & \alpha QC^T & \mu B \\ \alpha CQ & -\mu E & 0 \\ \mu B^T & 0 & -\mu E \end{pmatrix} < 0.$$

Введя обозначение $Y = KQ$ его можно записать в виде линейного матричного неравенства

$$\begin{pmatrix} QA^T + AQ + Y^TD^T + DY & \alpha QC^T & \mu B \\ \alpha CQ & -\mu E & 0 \\ \mu B^T & 0 & -\mu E \end{pmatrix} < 0. \tag{47}$$