1 Функции Ляпунова систем с управлением

Определение. Непрерывно дифференцируемую, положительно определенную, бесконечно большую при $|x| \to \infty$ функцию $V(x)$ называют *функцией Ляпунова системы с управлением*

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \ u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

если выполнено условие

$$\forall x \neq 0 \qquad \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \dot{V}(x) \equiv \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x,u) < 0. \tag{2}$$

Рассмотрим случай аффинных систем. Для этих систем условие (2) эквивалентно более простому требованию. В его формулировке в случае векторного управления удобно использовать следующие обозначения. Гладкой аффинной системе

$$\dot{x} = A(x) + \sum_{i=1}^{m} B_i(x) u_i, \quad A(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u = (u_1, \ldots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m, \tag{3}$$

взаимно однозначно соответствуют векторные поля $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_i$, $i = \overline{1,m}$. Обозначим через $\mathbf{B}$ блочную матрицу – строку $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m)$ и по определению будем считать, что

$$\mathbf{B}V(x) = (\mathbf{B}_1 V(x), \ldots, \mathbf{B}_m V(x)).$$

Тогда для дифференцируемой функции $V(x)$ ее производная в силу аффинной системы (3) равна

$$\dot{V}(x) = \mathbf{A}V(x) + (\mathbf{B}V(x))u.$$

Теорема 1. (Критерий функции Ляпунова для аффинных систем) Для того, чтобы непрерывно дифференцируемая, положительно определенная, бесконечно большая при $|x| \to \infty$ функция $V(x)$ была функцией Ляпунова аффинной системы (3) необходимо и достаточно выполнения условия: если $\mathbf{B}V(x) = 0$ в точке $x \neq 0$, то в этой точке $\mathbf{A}V(x) < 0$.

◀ Пусть $V(x)$ — функция Ляпунова аффинной системы (3). Тогда по определению

$$\forall x \neq 0 \quad \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \dot{V}(x) = \mathbf{A}V(x) + \inf_{u \in \mathbb{R}^m} (\mathbf{B}V(x))u < 0$$

и поэтому, при $\mathbf{B}V(x) = 0$ получаем неравенство $\mathbf{A}V(x) < 0$, что доказывает необходимость выполнения условия теоремы.

Для доказательства достаточности предположим, что в любой точке $x \neq 0$, где $\mathbf{B}V(x) = 0$ выполнено неравенство $\mathbf{A}V(x) < 0$. Тогда в таких точках

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \dot{V}(x) = \mathbf{A}V(x) + (\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \mathbf{B}V(x))u = \mathbf{A}V(x) < 0.$$

В остальных точках $x \neq 0$ выполнено условие $\mathbf{B}V(x) \neq 0$. Пусть x одна из таких точек. Тогда в этой точке, например, $\mathbf{B}_1 V(x) \neq 0$. В этом случае существует такое $r \in \mathbb{R}$, для которого

$$\mathbf{A}V(x) + \mathbf{B}_1 V(x) r < 0.$$

Тогда при $u(r) = (r, 0, \ldots, 0)^T$ находим, что

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \dot{V}(x) \leq \dot{V}(x)|_{u=u(r)} = \mathbf{A}V(x) + \mathbf{B}_1 V(x) r < 0. \quad ▶$$

Замечание. Далее аргумент x в производных $\mathbf{A}V(x)$ и $\mathbf{B}V(x)$ будем для краткости пропускать.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_2^2 + u. \end{cases}$$

Будем искать функцию Ляпунова в виде положительно определённой квадратичной формы $V(x) = \frac{1}{2}px_1^2 + qx_1x_2 + \frac{1}{2}rx_2^2$. Тогда

$$\frac{\partial V}{\partial x} = (px_1 + qx_2; qx_1 + rx_2).$$

$$\mathbf{B}V = qx_1 + rx_2; \quad \mathbf{B}V = 0 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{q}{r}x_1.$$

$$\mathbf{A}V = (px_1 + qx_2)x_1^2x_2 - (qx_1 + rx_2)x_1x_2^2; \quad \mathbf{A}V|_{\mathbf{B}V=0} = \left(px_1 - \frac{q^2}{r}x_1\right)x_1^2x_2 = -\frac{q}{r^2}\left(pr - q^2\right)x_1^4;$$

Вследствие критерия Сильвестра $pr - q^2 > 0$, поэтому $\mathbf{A}V|_{\mathbf{B}V=0} < 0$ при выполнении дополнительного условия $q > 0$. Итак, квадратичная форма $V(x) = \frac{1}{2}px_1^2 + qx_1x_2 + \frac{1}{2}rx_2^2$ будет функцией Ляпунова нашей системы при $p > 0$, $q > 0$, $pr - q^2 > 0$.

Оказывается, что если аффинная система имеет функцию Ляпунова $V(x)$, то с ее помощью можно задать такое непрерывное (при выполнении дополнительного условия) глобально стабилизирующее управление, при котором функция $V(x)$ будет функцией Ляпунова замкнутой системы.

Определение. Пусть $V(x)$ —функция Ляпунова аффинной системы (3).

Тогда функцию

$$\alpha_s(x) = \begin{cases} -\dfrac{\mathbf{A}V + \sqrt{(\mathbf{A}V)^2 + \|\mathbf{B}V\|^4}}{\|\mathbf{B}V\|^2}(\mathbf{B}V)^T, & \mathbf{B}V \neq 0 \\ 0, & \mathbf{B}V = 0 \end{cases}$$

называют *функцией Зонтага*, а управление $u = \alpha_s(x)$ — *управлением Зонтага*.

Замечание. В случае системы со скалярным управлением

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u, \quad A(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R},$$

формула для управления Зонтага может быть записана в упрощённой форме:

$$\alpha_s(x) = \begin{cases} -\dfrac{\mathbf{A}V + \sqrt{(\mathbf{A}V)^2 + (\mathbf{B}V)^4}}{\mathbf{B}V}, & \mathbf{B}V \neq 0; \\ 0, & \mathbf{B}V = 0. \end{cases}$$

Функция и управление Зонтага имеют следующие свойства.

Теорема 2. Если $V(x)$ гладкая функция Ляпунова аффинной системы (3), то функция $\alpha_s(x)$ является гладкой в области $x \neq 0$.

◀ Если в точке $\hat{x} \neq 0$ выполнено неравенство $\mathbf{B}V(\hat{x}) \neq 0$, то функция $\alpha_s(x)$ в окрестности этой точки совпадает с гладкой функцией

$$-\frac{\mathbf{A}V + \sqrt{(\mathbf{A}V)^2 + \|\mathbf{B}V\|^4}}{\|\mathbf{B}V\|^2}(\mathbf{B}V)^T.$$

Если же $\mathbf{B}V(\hat{x}) = 0$ и $\hat{x} \neq 0$, то согласно теореме 1 $\mathbf{A}V(\hat{x}) < 0$ и поэтому $\mathbf{A}V < 0$ в некоторой окрестности точки $\hat{x}$.

Следовательно, в этой окрестности

$$\mathbf{A}V - \sqrt{(\mathbf{A}V)^2 + \|\mathbf{B}V\|^4} < 0,$$

а функция $\alpha_s(x)$ совпадает с функцией

$$\frac{\|\mathbf{B}V\|^2}{\mathbf{A}V - \sqrt{(\mathbf{A}V)^2 + \|\mathbf{B}V\|^4}}(\mathbf{B}V)^T,$$

которая является гладкой в рассматриваемой окрестности точки $\hat{x}$. ▶

Теорема 3. При $x \neq 0$ производная функции $V(x)$ в силу замкнутой системы

$$\dot{x} = A(x) + B(x)\alpha_s(x)$$

отрицательна.

◀ Если $\mathbf{B}V = 0$ и $x \neq 0$, то $\dot{V}(x) = \mathbf{A}V + (\mathbf{B}V)\alpha_s(x) = \mathbf{A}V < 0$. Если же $\mathbf{B}V \neq 0$, то

$$\dot{V}(x) = \mathbf{A}V + (\mathbf{B}V)\alpha_s(x) = -\sqrt{(\mathbf{A}V)^2 + \|\mathbf{B}V\|^4} < 0. \text{ ▶}$$

Определение. Говорят, что функция Ляпунова $V(x)$ системы с управлением $\dot{x} = f(x,u)$ удовлетворяет *свойству малых управлений*, если в некоторой окрестности нулевого положения равновесия существует непрерывное управление $u_c(x)$, $u_c(0) = 0$, при котором производная в силу замкнутой системы

$$\dot{V}(x)|_{u=u_c(x)} < 0, \quad x \neq 0.$$

Очевидно, что свойство малых управлений можно сформулировать также следующим образом: в некоторой окрестности нуля должна существовать такая непрерывная в нуле функция $u_c(x)$, $u_c(0) = 0$, что функция $\dot{V}(x)\Big|_{(3),u=u_c(x)}$ имеет в нуле строгий локальный максимум.

Теорема 4. Для того, чтобы функция $\alpha_s(x)$ была непрерывна в точке $x = 0$ необходимо и достаточно, чтобы соответствующая функция Ляпунова $V(x)$ аффинной системы удовлетворяла свойству малых управлений.

◀ Необходимость условия следует из того, что по теореме 3 при $x \neq 0$ выполнено неравенство $\dot{V}(x)|_{u=\alpha_s(x)} < 0$ и если функция $\alpha_s(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, то функция Ляпунова $V(x)$ аффинной системы удовлетворяет свойству малых управлений.

Докажем достаточность. Пусть функция Ляпунова $V(x)$ аффинной системы удовлетворяет свойству малых управлений. Рассмотрим два случая.

1. Предположим, что в точке x выполнено неравенство $\mathbf{A}V \geq 0$. Тогда из неравенства

$$\dot{V}(x)|_{u=u_c(x)} = \mathbf{A}V + \mathbf{B}Vu_c(x) < 0,$$

следует, что

$$|\mathbf{A}V| < |\mathbf{B}Vu_c(x)| \leq \|\mathbf{B}V\| \cdot \|u_c(x)\|$$

и поэтому

$$\|\alpha_s(x)\| = \frac{|\mathbf{A}V + \sqrt{(\mathbf{A}V)^2 + \|\mathbf{B}V\|^4}|}{\|\mathbf{B}V\|^2}\|\mathbf{B}V\| =$$

$$= \frac{|\mathbf{A}V| + \sqrt{|\mathbf{A}V|^2 + \|\mathbf{B}V\|^4}}{\|\mathbf{B}V\|} \leq \|u_c(x)\| + \sqrt{\|u_c(x)\|^2 + \|\mathbf{B}V\|^2}.$$

2. Предположим, что в точке x выполнено неравенство $\mathbf{A}V < 0$. Тогда

$$0 \le \mathbf{A}V + \sqrt{(\mathbf{A}V)^2 + \|\mathbf{B}V\|^4} \le \|\mathbf{B}V\|^2$$

(последнее неравенство выполнено, поскольку

$$(\mathbf{A}V)^2 + \|\mathbf{B}V\|^4 < (\mathbf{A}V)^2 + \|\mathbf{B}V\|^4 - 2\mathbf{A}V = \left(-\mathbf{A}V + \|\mathbf{B}V\|^2\right)^2)$$

и поэтому

$$\|\alpha_s(x)\| = \frac{|\mathbf{A}V + \sqrt{(\mathbf{A}V)^2 + \|\mathbf{B}V\|^4}|}{\|\mathbf{B}V\|^2}\|\mathbf{B}V\| \le \|\mathbf{B}V\|.$$

Следовательно,

$$\|\alpha_s(x)\| \le \max\{\|u_c(x)\| + \sqrt{\|u_c(x)\|^2 + \|\mathbf{B}V\|^2},\ \|\mathbf{B}V\|\} \to 0 \text{ при } x \to 0,$$

поскольку функции $\|u_c(x)\|$ и $\|\mathbf{B}V\|$ непрерывны и равны нулю в точке $x = 0$. ▶

В итоге получаем следующее утверждение.

Теорема 5. Если существовует гладкая функция Ляпунова аффинной системы (3), удовлетворяющая свойству малых управлений, то соответствующее ей управление Зонтага глобально стабилизирует нулевое положение равновесия.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_1 x_2 u. \end{cases}$$

Будем искать функцию Ляпунова в виде $V(x) = \frac{1}{2}px_1^2 + \frac{1}{2}qx_2^2$, $p > 0$, $q > 0$. Тогда

$$\mathbf{B}V = px_1 + qx_1x_2^2 = x_1(p + qx_2^2); \quad \mathbf{B}V = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0.$$

$$\mathbf{A}V = px_1(x_1 + x_2) + qx_2(x_1 - x_2); \quad \mathbf{A}V|_{\mathbf{B}V=0} = -qx_2^2 < 0 \text{ (при } x_2 \ne 0).$$

Итак,

$$u_s = \begin{cases} -\dfrac{px_1(x_1+x_2) + qx_2(x_1-x_2) + \sqrt{(px_1(x_1+x_2) + qx_2(x_1-x_2))^2 + x_1^4(p+qx_2^2)^4}}{x_1(p+qx_2^2)}, & x_1 \ne 0, \\ 0, & x_1 = 0, \end{cases}$$

где p и q — любые положительные константы. Проверим свойство малых управлений:

$$\dot{V} = px_1(x_1 + x_2 + u) + qx_2(x_1 - x_2 + x_1x_2u) = px_1^2 + (p+q)x_1x_2 - qx_2^2 + (p + qx_2^2)x_1u;$$

Если положить

$$u = \alpha_c(x) = \frac{-(p+q)x_2 - 2px_1}{p + qx_2^2},$$

то получим

$$\dot{V}(x)\Big|_{u=\alpha_c(x)} = -px_1^2 - qx_2^2.$$

Таким образом, свойство малых управлений для найденных функций Ляпунова выполняется. Заметим, что функция $u = \alpha_c(x)$ в этом примере сама является является глобально асимптотически стабилизирующим нулевое решение управлением.

Пример 3. Рассмотрим систему $\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}_1 & = & -x_2+x_1^4u\\ \dot{x}_2 & = & x_1+x_2^4u\end{array}\right.$ Будем искать функцию Ляпунова в виде $V(x)=\frac{1}{2}px_1^2+\frac{1}{2}qx_2^2$, $p>0$, $q>0$. Тогда

$$\mathbf{B}V=px_1^5+qx_2^5;\quad \mathbf{B}V=0\Leftrightarrow x_1=-\frac{q}{p}x_2^5.$$

$$\mathbf{A}V=(q-p)x_1x_2;\quad \mathbf{A}V|_{\mathbf{B}V=0}=-(q-p)\frac{q}{p}x_2^6<0 \text{ (при } x_2\neq 0 \text{ и } q>p>0).$$

Итак,

$$u_s=\begin{cases}-\dfrac{(q-p)x_1x_2+\sqrt{((q-p)x_1x_2)^2+(px_1^5+qx_2^5)^4}}{px_1^5+qx_2^5}, & px_1^5+qx_2^5\neq 0,\\ 0, & px_1^5+qx_2^5=0,\end{cases}$$

где p и q — любые положительные константы. Проверим свойство малых управлений:

$$\dot{V}=px_1(-x_2+x_1^4u)+qx_2(x_1+x_2^4u)=(q-p)x_1x_2+(px_1^5+qx_2^5)u;$$

свойство малых управлений не выполняется.

Пример 4. Рассмотрим систему

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dot{x}_1 & = & -x_2+u_1\\ \dot{x}_2 & = & -x_1+x_3^2-u_1\\ \dot{x}_3 & = & -x_1x_3+u_2\\ \dot{x}_4 & = & -x_4-u_2\end{array}\right.$$

Будем искать функцию Ляпунова в виде положительно определённой квадратичной формы $V(x)=\frac{1}{2}px_1^2+\frac{1}{2}qx_2^2+\frac{1}{2}rx_3^2+\frac{1}{2}sx_4^2$. Тогда

$$\frac{\partial V}{\partial x}=(px_1;qx_2;rx_3;sx_4).$$

$$\mathbf{B_1}V=px_1-qx_2;\quad \mathbf{B_2}V=rx_3-sx_4;\quad \mathbf{B}V=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}px_1=qx_2\\ rx_3=sx_4.\end{array}\right.$$

$$\mathbf{A}V|_{\mathbf{B}V=0}=\left(-px_1x_2+q(-x_1+x_3^2)x_2-rx_1x_3^2-sx_4^2\right)\big|_{qx_2=px_1,sx_4=rx_3}=$$

$$=-\frac{p^2}{q}x_1^2+q(-x_1+x_3^2)\cdot\frac{p}{q}x_1-rx_1x_3^2-\frac{r^2}{s}x_3^2=-p\left(1+\frac{p}{q}\right)x_1^2+px_1x_3^2-rx_1x_3^2-\frac{r^2}{s}x_3^2$$

Очевидно, что условие $\forall x\neq 0\ \ \mathbf{A}V|_{\mathbf{B}V=0}<0$ будет выполняться при $p=r$.

Учитывая тот факт, что $\|\mathbf{B}V\|^2=(px_1-qx_2)^2+(rx_3-sx_4)^2=(px_1-qx_2)^2+(px_3-sx_4)^2$, получим

$$u_s=\begin{cases}-\dfrac{\mathbf{A}V+\sqrt{(\mathbf{A}V)^2+((px_1-qx_2)^2+(px_3-sx_4)^2)^2}}{(px_1-qx_2)^2+(px_3-sx_4)^2}(px_1-qx_2,px_3-sx_4)^T, & \mathbf{B}V\neq 0,\\ 0, & \mathbf{B}V=0,\end{cases}$$

где $p>0$, $q>0$, $s>0$, $\mathbf{A}V=-px_1x_2+qx_2(-x_1+x_3^2)-px_1x_3^2-sx_4^2$.

Проверим теперь свойство малых управлений.

$$\dot{V}=px_1(-x_2+u_1)+qx_2(-x_1+x_3^2-u_1)+px_3(-x_1x_3+u_2)+sx_4(-x_4-u_2)=$$

$$-px_1x_2 + qx_2(-x_1 + x_3^2) - px_1x_3^2 - sx_4^2 + u_1(px_1 - qx_2) + u_2(px_3 - sx_4);$$

Будем искать $u_1 = \alpha_{c1}(x)$ в виде $ax_1 + bx_2$, где a и b — некоторые числа, а $u_2 = \alpha_{c2}(x)$ в виде $-(px_3 - sx_4)$. Тогда функция, максимальность которой в точке 0 мы должны обеспечить, запишется в виде

$$w(x) = \dot{V}(x)\Big|_{u=\alpha_c(x)} =$$

$$= -px_1x_2 - qx_1x_2 + qx_2x_3^2 - px_1x_3^2 - sx_4^2 + (ax_1 + bx_2)(px_1 - qx_2) - (px_3 - sx_4)^2.$$

Вторые производные слагаемых третьего порядка $qx_2x_3^2 - px_1x_3^2$ в нуле равны нулю и не повлияют на знакоопределённость функции $w(x)$, поэтому вместо неё можно проверить достаточное условие экстремума для функции

$$\tilde{w} = -(p+q)x_1x_2 + (ax_1 + bx_2)(px_1 - qx_2) - (px_3 - sx_4)^2 - sx_4^2,$$

представляющей из себя сумму двух квадратичных форм — от x_1, x_2 и от x_3, x_4. Вторая из этих форм отрицательно определена; следовательно, для удовлетворения достаточного условия максимума надо добиться отрицательной определённости формы $-(p+q)x_1x_2+(ax_1+bx_2)(px_1-qx_2)$. С помощью критерия Сильвестра нетрудно убедиться, что для этого можно принять $a = -p/q$, $b = q/p$.

Итак, $\alpha_c(x) = (-px_1/q + qx_2/p, -px_3 + sx_4)$.

Упражнения

1. [ссылка на книгу Зонтага] Убедитесь в том, что нулевое положение равновесия всех систем вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) + x_1^r u \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + x_2^r u, \end{cases}$$

где $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ — произвольные гладкие функции, $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$, а r — произвольное нечётное натуральное число, глобально асимптотически стабилизируемо. Какой вид имеет функция Ляпунова такой системы?

2. Покажите, что нулевое положение равновесия систем вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + x_1u_1 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + x_2u_2 \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) + x_3u_1 \\ \dot{x}_4 &= f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) + x_4u_2, \end{cases}$$

где f_1, f_2, f_3 и f_4 — произвольные гладкие функции, равные нулю в точке $(0,0,0,0)$, глобально асимптотически стабилизируемо. Какой вид имеет функция Ляпунова такой системы?

Для следующих систем найдите наиболее простой вид функции Ляпунова и постройте управление Зонтага. Выполняется ли для найденных функций Ляпунова свойство малых управлений? Если да, укажите вид функции $\alpha_c(x)$.

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1x_2 + x_1u \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 + u \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + x_2u \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2 - x_1u \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 \cos x_2 + x_2 u \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - x_2 + x_1 u \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1^2 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_1^2 - x_2^3 - u. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 - \operatorname{arctg} x_2 - u \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 - x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_2 - x_3 + u \\ \dot{x}_3 &= x_2 - x_3 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_2 + x_3^2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_2 - u \\ \dot{x}_3 &= -x_2 - x_3 - x_1 x_3 + u \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 \cos x_2 + x_1^3 u_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 - x_4 + u_2 \\ \dot{x}_3 &= \sin x_2 + x_3 u_1 \\ \dot{x}_4 &= x_1 x_3 - u_2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2^2 + u_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_3 + u_1 - u_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - u_1 + u_2 \\ \dot{x}_4 &= -x_2^3 - x_4 - u_2 + u_3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= x_3^2 + u_1 \\ \dot{x}_3 &= -x_1 x_2 - x_3^2 + u_2 \\ \dot{x}_4 &= -x_4 + u_1 + u_2 \end{cases}$

2 Классы функций сравнения

Классом $\mathcal{K}$ называют множество непрерывных монотонно возрастающих функций $\alpha = \alpha(r)$, $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих условию $\alpha(0) = 0$. *Классом* $\mathcal{K}_\infty$ называют множество тех функций $\alpha(r) \in \mathcal{K}$, для которых $\lim\limits_{r\to+\infty} \alpha(r) = +\infty$.

Пример 5. Функции r^n $(n > 0)$ и $e^r - 1$ принадлежат классу $\mathcal{K}$ и его подмножеству — классу $\mathcal{K}_\infty$.

Пример 6. Функции $\operatorname{arctg} r$ и $\operatorname{th} r$ принадлежат классу $\mathcal{K}$, но не принадлежат классу $\mathcal{K}_\infty$.

Функции классов $\mathcal{K}_\infty$ обладают следующими свойствами:

- для каждой функции $y = \alpha(r)$ класса $\mathcal{K}_\infty$ существует обратная функция $\alpha^{-1}(y)$, которая тоже принадлежит классу $\mathcal{K}_\infty$;
- композиция $\alpha_1 \circ \alpha_2$ функций класса $\mathcal{K}$ (класса $\mathcal{K}_\infty$) принадлежит классу $\mathcal{K}$ (классу $\mathcal{K}_\infty$).

Классом $\mathcal{KL}$ называют множество функций $\beta = \beta(r, s)$, $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, для которых при любом фиксированном $s \in \mathbb{R}_+$ функция $\alpha(r) = \beta(r, s)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, а при любом фиксированном $r \in \mathbb{R}_+$ функция $\phi(s) = \beta(r, s)$ монотонно убывает и $\lim\limits_{s\to+\infty} \phi(s) = 0$. *Классом* $\mathcal{KL}_\infty$ называют множество тех функций $\beta(r, s) \in \mathcal{KL}$, которые при любом фиксированном $s \in \mathbb{R}_+$ как функция $\alpha(r) = \beta(r, s)$ принадлежат классу $\mathcal{K}_\infty$.

Функции из классов $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_\infty$, $\mathcal{KL}$ и $\mathcal{KL}_\infty$ называют *функциями сравнения.*

Пример 7. Функции $r^k e^{-\lambda s}$ и $r^2/(krs+1)$, $r, s \geqslant 0$, при положительных значениях параметров λ и k принадлежат классу $K\mathcal{L}_\infty$.

Пример 8. Функции $\operatorname{arctg} r/(1+s)$ и $\operatorname{th} r/(1+s)$ принадлежат классу $\mathcal{KL}$, но не принадлежат классу $\mathcal{KL}_\infty$.

Теорема 6. (Лемма об оценке положительно определенной функции) Пусть функция $V(x)$ непрерывна в $\mathbb{R}^n$ и положительно определена. Тогда существуют такие функции $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$, что при $x \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha_1(\|x\|) \le V(x) \le \alpha_2(\|x\|).$$

Если функция $V(x)$ радиально неограничена, то функции $\alpha_{1,2}(r)$ можно выбрать в классе $\mathcal{K}_\infty$.

◀Для функций

$$\alpha_*(r) = \inf_{r \leqslant \|x\|} V(x), \quad \alpha^*(r) = \sup_{\|x\| \leq r} V(x), \quad r \in [0, +\infty)$$

выполнены неравенства

$$\alpha_*(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha^*(\|x\|).$$

Эти функции непрерывны и неубывают на промежутке $[0, +\infty)$, а в точке $r = 0$ равны нулю. Поскольку функции α_* и α^* не являются, вообще говоря, монотонно возрастающими, они не принадлежат классу $\mathcal{K}$. Но их можно аппроксимировать (α_* снизу, а α^* сверху) функциями α_1 и α_2 из класса $\mathcal{K}$, которые и являются искомыми. ▶

Теорема 7. (Критерии устойчивости) Положение равновесия $x = 0$ системы

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \forall t \geq 0 \ \ f(0, t) = 0, \tag{4}$$

является:

- равномерно устойчивым тогда и только тогда, когда существуют такие функция $\alpha \in \mathcal{K}$ и число $\delta' > 0$, что для любого начального условия $x(t_0)$, $\|x(t_0)\| < \delta'$, и любого $t \geq t_0 \geq 0$ выполнено неравенство
$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(t_0)\|);$$
- равномерно асимптотически устойчивым тогда и только тогда, когда существуют такие функция $\beta \in \mathcal{KL}$ и число $\delta' > 0$, что для любого начального условия $x(t_0)$, $\|x(t_0)\| < \delta'$, и любого $t \geq t_0 \geq 0$ выполнено неравенство
$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0);$$
- глобально равномерно асимптотически устойчивым тогда и только тогда, когда существует такая функция $\beta \in \mathcal{KL}$, что для любого начального условия $x(t_0)$ и любого $t \geq t_0 \geq 0$ выполнено неравенство
$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0).$$

Замечание. В случае автономной системы положение равновесия $x = 0$ системы $\dot{x} = f(x)$:

- устойчиво тогда и только тогда, когда существуют такие функция $\alpha \in \mathcal{K}$ и число $\delta' > 0$, что для любого начального условия $x(0)$, $\|x(0)\| < \delta'$, и любого $t \geq 0$ выполнено неравенство
$$\|x(t)\| \leq \alpha(\|x(0)\|);$$
- асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда существуют такие функция $\beta \in \mathcal{KL}$ и число $\delta' > 0$, что для любого начального условия $x(0)$, $\|x(0)\| < \delta'$, и любого $t \geq 0$ выполнено неравенство
$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t);$$
- глобально асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда существует такая функция $\beta \in \mathcal{KL}$, что для любого начального условия $x(0)$ и любого $t \geq 0$ выполнено неравенство
$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t).$$

Упражнения

13. Определите, принадлежат ли классам $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_\infty$ следующие функции:

а) e^r; б) $\operatorname{sh} r$; в) $\operatorname{ch} r - 1$; г) $\ln(1+r)$; д) $1 - \dfrac{2}{1+e^r}$.

14. Определите, принадлежат ли классам $\mathcal{KL}$ и $\mathcal{KL}_\infty$ следующие функции:

а) $\dfrac{\operatorname{sh} r}{\operatorname{ch} s}$; б) $(e^r - 1)e^{-s}$; в) $(\operatorname{ch} r - 1)\sin^2 \dfrac{1}{s}$; г) r/s; д) $\dfrac{r^2}{r^2+s+1}$.

3 Глобальная устойчивость при наличии возмущений

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = A(x,t) + C(x,t)w, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad w \in \mathbb{R}^k, \tag{5}$$

где функции f кусочно непрерывны по t и локально липшицевы по x, $f(0,t) \equiv 0$, w — возмущение — кусочно непрерывная и ограниченная функция $t \in [0, +\infty]$. Соответствующую систему

$$\dot{x}(t) = A(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{6}$$

называют *невозмущенной системой*, а систему (5) — *возмущенной системой.*

Систему (5) называют *глобально устойчивой при наличии возмущений* или *устойчивой от входа к состоянию*, если существуют такие функции $\beta \in \mathcal{KL}$ и $\gamma \in \mathcal{K}$, что для любого начального состояния $x(t_0)$ и любого кусочно непрерывного ограниченного возмущения $w = w(t)$, решение $x(t)$ системы определено при всех $t \geq t_0$ и удовлетворяет условию

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma(\sup_{[t_0,t]} \|w(\tau)\|) \text{ при } t \geqslant t_0. \tag{7}$$

Замечание. При нулевых начальных условиях формула (7) принимает вид

$$\|x(t)\| \leq \gamma(\sup_{[t_0,t]} \|w(\tau)\|) \text{ при } t \geqslant t_0. \tag{8}$$

Замечание. Если система (5) глобально устойчива при наличии возмущений, то при любом ограниченном возмущении решения системы (5) ограничены, а если $\lim\limits_{t\to+\infty} w(t) = 0$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Замечание. Глобальная устойчивость системы (5) при наличии возмущений означает, что нулевое решение невозмущенной системы (6) глобально равномерно асимптотически устойчиво. Обратное неверно, что показывает

Пример 9. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -x + x(1+x)(1+x^2)w.$$

Нулевое решение невозмущённой системы асимптотически устойчиво, однако при ограниченном и бесконечно малом при $|x| \to \infty$ возмущении

$$w = \frac{1}{1+x^2}$$

решения замкнутой системы

$$\dot{x} = x^2$$

уходят в бесконечность на конечном промежутке времени:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \ \Rightarrow\ \frac{dx}{x^2} = dt \ \Rightarrow\ -\frac{1}{x} = t + C \ \Rightarrow\ x = \frac{-1}{t + C}.$$

Теорема 8. (о глобальной устойчивости при наличии возмущений) Пусть для системы (5) существует функция $V(x,t)$, непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая в $\mathbb{R}^n \times [0,+\infty) \times \mathbb{R}^k$ условиям

$$\alpha_1(\|x\|) \leqslant V(x,t) \leqslant \alpha_2(\|x\|), \tag{9}$$

где функции $\alpha_{1,2} \in \mathcal{K}_\infty$, и $\forall x :\ \|x\| \geqslant \rho(\|w\|)$

$$\dot V(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} A(x,t) + \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} C(x,t) w \leqslant -P(x), \tag{10}$$

где $P(x)$ — положительно определённая функция, $\rho \in \mathcal{K}_\infty$. Тогда система (5) глобально устойчива при наличии возмущений, а функцию γ в (7) можно выбрать равной $\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \rho$.

Функцию V, удовлетворяющую условию теоремы, называют *функцией Ляпунова системы с возмущением.*

Замечание. Обратное к теореме 8 утверждение также верно: из глобальной устойчивости системы (5) при наличии возмущений следует существование функциии Ляпунова системы с возмущением.

Пример 10. Рассмотрим систему с возмущением

$$\dot x = -x^3 + w.$$

Ей соответствует невозмущенная система $\dot x = -x^3$ с глобально асимптотически устойчивым нулевым положением равновесия. Функция $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ является функцией Ляпунова для невозмущенной системы. Проверим, будет ли она функцией Ляпунова системы с возмущением. Вычисляя и оценивая ее производную в силу возмущенной системы, при $\theta \in (0,1)$ получаем

$$\begin{aligned} \dot V(x) = -x^4 + xw = -(1-\theta)x^4 - \theta x^4 + xw \leqslant \\ \leqslant -(1-\theta)x^4 - \theta|x|^4 + |x|\cdot|w| = -(1-\theta)x^4 - |x|(\theta|x|^3 - |w|) \leqslant \\ \leqslant -(1-\theta)x^4, \end{aligned}$$

если $\theta|x|^3 - |w| \geqslant 0$, т.е. если $|x| \geqslant \sqrt[3]{|w|/\theta}$. Следовательно, условие (10) выполнено с функцией $\rho(r) = \sqrt[3]{r/\theta}$ и система глобально устойчива при наличии возмущений.

Построим оценку для нормы состояния при нулевых начальных условиях. Имеем

$$\alpha_1(|x|) = \alpha_2(|x|) = V(x) = \frac{1}{2}|x|^2,$$

поэтому

$$\gamma(z) = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\rho(z))) = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{z/\theta}\right)^2} = \left|\sqrt[3]{z/\theta}\right|;$$

отсюда

$$\forall t \geqslant 0 \quad \|x(t)\| \leqslant \sqrt[3]{\frac{\sup_{[0,t]}\|w(\tau)\|}{\theta}}.$$

Точной нижней гранью всех таких оценок будет

$$\forall t \geqslant 0 \quad \|x(t)\| \leqslant \sqrt[3]{\sup_{[0,t]} \|w(\tau)\|}.$$

Пример 11. Рассмотрим линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + w. \end{cases}$$

Покажем, что функция $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ будет функцией Ляпунова для системы с возмущением:

$$\dot{V}(x) = x_1(-x_1 - x_2) + x_2(x_1 - 2x_2 + w) = -x_1^2 - 2x_2^2 + x_2 w =$$

(выберем некоторую константу $\theta \in (0, 1)$)

$$= -x_2^2 - \|x\|^2 + x_2 w = -x_2^2 - (1-\theta)\|x\|^2 - \theta\|x\|^2 + x_2 w \leqslant -x_2^2 - (1-\theta)\|x\|^2 - \theta\|x\|^2 + |x_2| \cdot |w| =$$

$$= -x_2^2 - (1-\theta)\|x\|^2 - \|x\| \left(\theta\|x\| - \frac{|x_2|}{\|x\|}|w| \right);$$

условие $\theta\|x\| - \frac{|x_2|}{\|x\|}|w| \geqslant 0$ будет гарантированно выполняться при $\|x\| \geqslant |w|/\theta$. Следовательно, условие (10) выполнено с функцией $\rho(r) = r/\theta$ и система глобально устойчива при наличии возмущений.

Построим оценку для нормы состояния при нулевых начальных условиях. Как и предыдущем примере

$$\alpha_1(\|x\|) = \alpha_2(\|x\|) = V(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2,$$

поэтому

$$\gamma(z) = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\rho(z))) = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2}\,(z/\theta)^2} = \frac{|z|}{\theta};$$

отсюда

$$\forall t \geqslant 0 \quad \|x(t)\| \leqslant \frac{\sup_{[0,t]} \|w(\tau)\|}{\theta}.$$

Точной нижней гранью всех таких оценок будет

$$\forall t \geqslant 0 \quad \|x(t)\| \leqslant \sup_{[0,t]} \|w(\tau)\|.$$

Упражнения

Исследуйте устойчивость при наличии возмущений и получите оценку нормы состояния при нулевых начальных условиях для следующих систем:

15. $\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1^3 - 2x_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 + w. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + \sin x_2 \cdot w \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 - \operatorname{arctg} x_2 + w. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - 3x_3 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - x_2 + w \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_3 + w. \end{cases}$

4 Глобальная стабилизация при наличии возмущений

Рассмотрим стационарную систему

$$\dot{x}(t) = A(x) + C(x)w + B(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad w \in \mathbb{R}^k, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{11}$$

где функции f, g, h локально липшицевы по x, $f(0) = 0$, w — возмущение, u — управление. Будем говорить, что система (11) *глобально стабилизируема при наличии возмущений*, если существует такое непрерывное управление $u = u_*(x)$, $u(0) = 0$, что замкнутая им система (11) глобально устойчива при наличии возмущений.

Гладкая положительно определённая радиально неограниченная функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ называется *функцией Ляпунова управляемой системы (11) с возмущением*, если существует такая функция $\rho \in \mathcal{K}_\infty$, что $\forall x \neq 0, w \in \mathbb{R}^k$

$$\|x\| \geqslant \rho(\|w\|) \quad \Rightarrow \quad \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \dot{V}|_{(11)} = \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \{\mathbf{A}V + \mathbf{B}Vu + \mathbf{C}Vw\} < 0$$

Теорема 9. (критерий функции Ляпунова управляемой системы с возмущением) Для того, чтобы гладкая положительно определённая радиально неограниченная функция $V(x)$ была функцией Ляпунова управляемой системы (11) с возмущением, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $\rho \in \mathcal{K}_\infty$, что $\forall x \neq 0$

$$\mathbf{B}V = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}V + \|\mathbf{C}V\|\rho^{-1}(\|x\|) < 0. \tag{12}$$

◀(Необходимость) Пусть V — функция Ляпунова управляемой системы с возмущением. Тогда по определению $\exists \rho \in \mathcal{K}_\infty : \forall x \neq 0 : \mathbf{B}V = 0, \forall w \in \mathbb{R}^k$

$$\|x\| \geqslant \rho(\|w\|) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}V + \mathbf{C}Vw < 0. \tag{13}$$

Рассмотрим возмущение вида

$$w = \frac{(\mathbf{C}V)^T}{\|\mathbf{C}V\|}\rho^{-1}(\|x\|).$$

Тогда

$$\rho(\|w\|) = \rho\left(\frac{\|\mathbf{C}V\|}{\|\mathbf{C}V\|}\rho^{-1}(\|x\|)\right) = \|x\|;$$

условие $\|x\| \geqslant \rho(\|w\|)$ при этом всегда выполняется. Подставляя w в (13), получим $\forall x \neq 0$

$$\mathbf{B}V = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}V + \frac{\|\mathbf{C}V\|^2}{\|\mathbf{C}V\|}\rho^{-1}(\|x\|) = \mathbf{A}V + \|\mathbf{C}V\|\rho^{-1}(\|x\|) < 0.$$

(Достаточность) Пусть выполняется (12). Для всех $x \neq 0 : \ \|x\| > \rho(\|w\|)$ имеет место неравенство $\|w\| \leqslant \rho^{-1}(\|x\|)$ и

$$\dot{V}|_{(11)} = \mathbf{A}V + \mathbf{B}Vu + \mathbf{C}Vw \leqslant \mathbf{A}V + \mathbf{B}Vu + \|\mathbf{C}V\|\,\|w\| \leqslant \mathbf{A}V + \mathbf{B}Vu + \|\mathbf{C}V\|\,\rho^{-1}(\|x\|).$$

Если $\mathbf{B}V = 0$, то

$$\dot{V}|_{(11)} = \mathbf{A}V + \|\mathbf{C}V\|\,\rho^{-1}(\|x\|) < 0;$$

если $\mathbf{B}V \neq 0$, то можем выбрать такое u, чтобы $\dot{V}|_{(11)}$ стала отрицательной (см. доказательство критерия для систем без возмущений). ▶

Теорема 10. Система (11) глобально стабилизируема при наличии возмущений тогда и только тогда, когда для неё существует функция Ляпунова управляемой системы с возмущением, удовлетворяющая свойству малых управлений. При этом стабилизирующее управление может быть вычислено по формуле

$$u_s(x) = \begin{cases} -\dfrac{\omega(x) + \sqrt{(\omega(x))^2 + \|\mathbf{B}V\|^4}}{\|\mathbf{B}V\|^2}(\mathbf{B}V)^T, & \mathbf{B}V \neq 0 \\ 0, & \mathbf{B}V = 0, \end{cases} \tag{14}$$

где

$$\omega(x) = \mathbf{A}V + \|\mathbf{C}V\|\, \rho^{-1}(\|x\|).$$

◀(Достаточность) Гладкость и непрерывность в нуле управления $u_s(x)$ доказывается аналогично случаю системы без возмущений. Покажем, что для $V(x)$ и системы, замкнутой нашим управлением, удовлетворяются условия теоремы 9. Действительно,

$$\dot{V}|_{(11)} = \mathbf{A}V + \mathbf{B}Vu + \mathbf{C}Vw = \mathbf{A}V - \omega(x) - \sqrt{(\omega(x))^2 + \|\mathbf{B}V\|^4} + \mathbf{C}Vw =$$

$$= \mathbf{A}V - \mathbf{A}V - \|\mathbf{C}V\|\,\rho^{-1}(\|x\|) - \sqrt{(\omega(x))^2 + \|\mathbf{B}V\|^4} + \mathbf{C}Vw \leqslant$$

$$\leqslant -\sqrt{(\omega(x))^2 + \|\mathbf{B}V\|^4} - \|\mathbf{C}V\|\,\rho^{-1}(\|x\|) + \|\mathbf{C}V\|\,\|w\| =$$

$$= -\sqrt{(\omega(x))^2 + \|\mathbf{B}V\|^4} - \|\mathbf{C}V\|\left(\rho^{-1}(\|x\|) - \|w\|\right) \leqslant$$

(для всех $x \neq 0: \ \|x\| > \rho(\|w\|)$, т.е. $\|w\| \leqslant \rho^{-1}(\|x\|)$)

$$\leqslant -\sqrt{(\omega(x))^2 + \|\mathbf{B}V\|^4}.$$

Функция

$$-\sqrt{(\omega(x))^2 + \|\mathbf{B}V\|^4} = -\sqrt{(\mathbf{A}V + \|\mathbf{C}V\|\,\rho^{-1}(\|x\|))^2 + \|\mathbf{B}V\|^4}$$

отрицательно определена по теореме 9. Следовательно, выполняются условия теоремы 8, т.е. замкнутая система глобальной устойчива при наличии возмущений.▶

Пример 12. Рассмотрим модифицированную систему из примера 2:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= & x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= & x_1 - x_2 + x_1x_2u + w. \end{cases}$$

Будем искать функцию Ляпунова в виде $V(x) = \frac{1}{2}px_1^2 + \frac{1}{2}qx_2^2$, $p > 0$, $q > 0$. Тогда

$$\mathbf{B}V = px_1 + qx_1x_2^2 = x_1(p + qx_2^2); \quad \mathbf{B}V = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0.$$

$$\mathbf{A}V = px_1(x_1 + x_2) + qx_2(x_1 - x_2); \quad \mathbf{A}V|_{\mathbf{B}V=0} = -qx_2^2 < 0 \text{ (при } x_2 \neq 0).$$

$$\mathbf{C}V = qx_2; \quad \|\mathbf{C}V\| = q|x_2|;$$

$$(\mathbf{A}V + |\mathbf{C}V|\rho^{-1}(\|x\|))\Big|_{\mathbf{B}V=0} = -qx_2^2 + q|x_2|\rho^{-1}(|x_2|) = q\left(|x_2|\rho^{-1}(|x_2|) - x_2^2\right).$$

Можно выбрать $\rho^{-1}(r) = r/\theta$, $\theta > 1$, тогда

$$u_s = \begin{cases} -\dfrac{\omega(x_1, x_2) + \sqrt{\omega^2(x_1, x_2) + x_1^4(p + qx_2^2)^4}}{x_1(p + qx_2^2)}, & x_1 \neq 0, \\ 0, & x_1 = 0, \end{cases}$$

где p и q — любые положительные константы,

$$\omega(x_1, x_2) = \mathbf{A}V + |\mathbf{C}V|\rho^{-1}(\|x\|) = px_1(x_1 + x_2) + qx_2(x_1 - x_2) + q|x_2|\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\theta}.$$

Свойство малых управлений для этой системы было проверено ранее.

Построим оценку для нормы решения при нулевых начальных условиях $x(0) = 0$. Функцию Ляпунова можно оценить с помощью соотношений Рэлея. Обозначив $m = \min(p, q)$, $M = \max(p, q)$, получим

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \alpha_1(\|x\|) = m\|x\|^2 \leqslant V(x) \leqslant M\|x\|^2 = \alpha_2(\|x\|).$$

Из (8)

$$\forall t \geqslant 0 \quad \|x(t)\| \leqslant \gamma(\sup_{[0,t]} \|w(\tau)\|),$$

причём

$$\gamma(z) = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\rho(z))) = \sqrt{\frac{M\rho^2(z)}{m}} = \sqrt{\frac{M\theta^2 z^2}{m}} = \sqrt{\frac{M}{m}}\theta|z|;$$

поскольку это неравенство выполняется для любого $\theta > 1$, можно заключить, что для замкнутой системы

$$\forall t \geqslant 0 \quad \|x(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{M}{m}} \sup_{[0,t]} \|w(\tau)\|.$$

5 Стабилизация при помощи функций Ляпунова для системы канонического вида

В процессе поиска стабилизирующего при наличии возмущений управления может возникнуть проблема поиска функции Ляпунова. В этой главе разберём один частный случай, для которого функция Ляпунова может быть найдена при помощи преобразования к эквивалентному каноническому виду.

Рассмотрим аффинную систему со скалярным управлением

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u, \quad A(0) = 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n, \;\; u \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Аффинную систему (15) называют эквивалентной на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ аффинной системе

$$\dot{z} = C(z) + D(z)u, \tag{16}$$

если существует диффеоморфизм $\Phi : \Omega \to \Phi(\Omega)$, $\Phi(x) = z$, который преобразует систему (15) в систему (16). Это означает, что в переменных $z = \Phi(x)$ система (15) совпадает с аффинной системой (16).

Предположим, что аффинная система (15) на $\mathbb{R}^n$ эквивалентна системе канонического вида

$$\begin{cases} \dot{z}_i = z_{i+1}, \\ \dot{z}_n = f(z) + g(z)u, \end{cases} \tag{17}$$

$i = \overline{1, n-1}$, причём $\Phi(\Omega) = \mathbb{R}^n$, $\Phi(0) = 0$ и для любой точки $M \in \mathbb{R}^n$ $g(M) \neq 0$.

Тогда система канонического вида (17) может быть записана в виде дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f(\overline{y}) + g(\overline{y})u, \tag{18}$$

где

$$\overline{y} = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})^T.$$

На множестве $\Phi(\Omega)$ для системы (18) в окрестности нуля определено управление

$$u(\overline{y}) = \frac{-f(\overline{y}) - K\overline{y}}{g(\overline{y})}, \quad K = (k_0, \dots, k_{n-1}), \quad k_i = const. \tag{19}$$

Замкнутую этим управлением систему (18) можно записать как дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + K\overline{y} = 0,$$

или в виде системы

$$\frac{d}{dt}\overline{y} = \mathcal{K}\overline{y}, \qquad \mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_0 & -k_1 & -k_2 & \dots & -k_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Ее нулевое решение, как известно [3], асимптотически устойчиво при соответствующем выборе коэффициентов k_i.

Таким образом, упрвaление (19) глобально асимптотически стабилизирует нулевое положение равновесия системы (18). Это означает, что то же управление в переменных x

$$u(x) = \frac{-f(\Phi(x)) - K\Phi(x)}{g(\Phi(x))} \tag{21}$$

глобально асимптотически стабилизирует нулевое положение равновесия системы (15) [4].

Пусть, далее, симметричная матрица P такова, что квадратичная форма $W(\overline{y}) = \overline{y}^T P \overline{y}$ является функцией Ляпунова системы (20), т.е. $P > 0$ и $K^T P + PK < 0$. Тогда фукнция

$$V(x) = W(\Phi(x)) = \Phi(x)^T P \Phi(x)$$

является функцией Ляпунова системы (15), замкнутой управлением (21). Её производная

$$\dot{V}\big|_{(15),(21)} = \frac{d}{dt}(\Phi(x(t))^T P \Phi(x(t)))\big|_{(15),(21)} =$$

$$= \left(\Phi'(x(t))\frac{dx}{dt}\right)^T P\Phi(x(t)) + \Phi(x(t))^T P \left(\Phi'(x(t))\frac{dx}{dt}\right) =$$

$$= \left(\Phi'(x(t))\frac{d}{dt}\left(\Phi^{-1}(\overline{y})\right)\right)^T P\Phi(x(t)) + \Phi(x(t))^T P \left(\Phi'(x(t))\frac{d}{dt}\left(\Phi^{-1}(\overline{y})\right)\right) =$$

$$= \left(\Phi'(x(t))(\Phi'(x(t)))^{-1}K\overline{y}\right)^T P\Phi(x(t)) + \Phi(x(t))^T P \left(\Phi'(x(t))(\Phi'(x(t)))^{-1}K\overline{y}\right) =$$

$$= \left(K\Phi(x(t))\right)^T P\Phi(x(t)) + \Phi(x(t))^T P \left(K\Phi(x(t))\right) = \Phi(x(t))^T \left(K^T P + PK\right)\Phi(x(t))$$

также будет отрицательно определённой, поскольку она отрицательна при всех x таких, что $\Phi(x) \neq 0$, т.е. $x \neq 0$.

Рассмотрим теперь систему с возмущениями

$$\dot{x} = A(x) + B(x)(u + w), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \ u \in \mathbb{R}, \ \ w \in \mathbb{R}. \tag{22}$$

Заметим, что управлеие (21) в общем случае не стабилизирует систему (22) при наличии возмущений. Оказывается, что полученная нами ранее функция $V(x)$ будет функцией Ляпунова системы (22), что даёт нам способ для построения стабилизирующего управления. Действительно, критерий (12) выполняется, поскольку $\mathbf{C}(x) \equiv \mathbf{B}(x)$ и

$$\mathbf{B}V = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}V + \|\mathbf{C}V\|\rho^{-1}(\|x\|) = \mathbf{A}V;$$

но при $\mathbf{B}V = 0$ выражение $\mathbf{A}V$ совпадает с производной $V(x)$ в силу глобально асимптотически устойчивой системы (15), замкнутой управлением (21):

$$\mathbf{B}V = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{V}\Big|_{(15),(21)} = \mathbf{A}V + u(x)\mathbf{B}V = \mathbf{A}V = \Phi(x(t))^T \left(K^T P + PK\right) \Phi(x(t)) < 0 \text{ при } x \neq 0.$$

Стабилизирующее при наличии возмущений управление может быть получено, в частности, по формуле (14).

Замечание. Свойство малых управлений для полученной функции Ляпунова выполняется в силу наличия управления (21).

Пример 13. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &=& x_2 + u + w \\ \dot{x}_2 &=& x_1 + e^{x_2} - 1. \end{cases}$$

Соответствующая система без возмущений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &=& x_2 + u \\ \dot{x}_2 &=& x_1 + e^{x_2} - 1 \end{cases}$$

эквивалентна на $\mathbb{R}^2$ регулярной системе канонического вида

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &=& z_2 \\ \dot{z}_2 &=& e^{z_1} z_2 - z_1 - u; \end{cases}$$

замена $z_1 = x_2$, $z_2 = x_1 + e^{x_2} - 1$. Таким образом, система без возмущений будет иметь функцию Ляпунова

$$V(x) = \frac{1}{2} q x_2^2 + r x_2 \left(x_1 + e^{x_2} - 1\right) + \frac{1}{2} s \left(x_1 + e^{x_2} - 1\right)^2, q > 0, r > 0, s > 0, qs - r^2 > 0.$$

$$\mathbf{A}V = s(x_1 + e^{x_2} - 1)x_2 + r x_2^2 + \left(x_1 + e^{x_2} - 1\right)\left[q x_2 + r(x_1 + e^{x_2} - 1) + r x_2 e^{x_2} + s e^{x_2}\left(x_1 + e^{x_2} - 1\right)\right]$$

$$\mathbf{B}V = \mathbf{C}V = s\left(x_1 + e^{x_2} - 1\right) + r x_2; \quad \mathbf{B}V = 0 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{r}{s} x_2 + 1 - e^{x_2}.$$

Можно выбрать $\rho^{-1}(r) = r/\theta$, $\theta > 0$, тогда

$$u_s = \begin{cases} -\dfrac{\omega(x_1, x_2) + \sqrt{\omega^2(x_1, x_2) + \left(s\left(x_1 + e^{x_2} - 1\right) + r x_2\right)^4}}{s\left(x_1 + e^{x_2} - 1\right) + r x_2}, & s\left(x_1 + e^{x_2} - 1\right) + r x_2 \neq 0, \\ 0, & s\left(x_1 + e^{x_2} - 1\right) + r x_2 = 0, \end{cases}$$

где

$$\omega(x_1, x_2) = \mathbf{A}V + |\mathbf{C}V|\rho^{-1}(\|x\|) =$$

$$= s(x_1 + e^{x_2} - 1)x_2 + r x_2^2 + \left(x_1 + e^{x_2} - 1\right)\left[q x_2 + r(x_1 + e^{x_2} - 1) + r x_2 e^{x_2} + s e^{x_2}\left(x_1 + e^{x_2} - 1\right)\right] +$$

$$+ \left|s\left(x_1 + e^{x_2} - 1\right) + r x_2\right| \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\theta}.$$

Построим оценку для нормы решения при нулевых начальных условиях $x(0) = 0$. Функцию Ляпунова оценим с помощью соотношений Рэлея. Обозначив $m = \min(p, q)$, $M = \max(p, q)$, получим

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \alpha_1(\|x\|) = m\|x\|^2 \leqslant V(x) \leqslant M\|x\|^2 = \alpha_2(\|x\|).$$

Из (8)

$$\forall t \geqslant 0 \quad \|x(t)\| \leqslant \gamma(\sup_{[0,t]} \|w(\tau)\|),$$

причём

$$\gamma(z) = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\rho(z))) = \sqrt{\frac{M\rho^2(z)}{m}} = \sqrt{\frac{M\theta^2 z^2}{m}} = \sqrt{\frac{M}{m}}\theta|z|;$$

поскольку это неравенство выполняется для любого $\theta > 1$, можно заключить, что для замкнутой системы

$$\forall t \geqslant 0 \quad \|x(t)\| \leqslant \sqrt{\frac{M}{m}} \sup_{[0,t]} \|w(\tau)\|.$$

Упражнения

Исследуйте устойчивость при наличии возмущений и получите оценку нормы состояния при нулевых начальных условиях для следующих систем:

19.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2 + w \\ \dot{x}_2 &= x_1 + c_2(x)w + u, \end{cases}$$

где $c_2(x)$ — произвольная гладкая функция.

20. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2 + \operatorname{arctg} x_2 \cdot w \\ \dot{x}_2 = x_1 + u. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2 + w \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3 - 2x_1^3 - x_1x_2 + u \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2 - x_1^2. \end{cases}$

Список литературы

[1] Krstic M., Deng H. Stabilization of Nonlinear Uncertain Systems. – Springer, 1998. – 193 p.

[2] Khalil H. K. Nonlinear systems; 2nd edition. – New York: Prentice-Hall, 1996. – 750 p.

[3] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

[4] Краснощёченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2005. – 520 с.