1 Задача стабилизации.

Рассмотрим задачу стабилизации аффинной стационарной системы

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $x = x(t)$, $A(x),\ B(x) \in C^\infty$, $A(0) = 0$. Построим непрерывное управление $u = u(x)$, $u(0) = 0$, стабилизирующее положение равновесия $x = 0$ системы (1).

Пусть аффинная система (1) удовлетворяет условиям теоремы об эквивалентности системе канонического вида в области Ω и ее положение равновесия $x = 0$ принадлежит Ω. Заметим, что всегда можно выбрать приводящее к каноническому виду преобразование $z = \Phi(x)$ таким образом, чтобы $\Phi(0) = 0$. Действительно, вместо функции $\Phi(x)$ можно взять функцию $\Phi(x) - \Phi(0)$, которая также будет удовлетворять всем условиям теоремы. Тогда положению равновесия $x = 0$ в канонических координатах будет соответствовать положение равновесия $z = 0$.

Предположим, что аффинная система (1) в некоторой окрестности Ω своего положения равновесия $x = 0$ эквивалентна системе канонического вида

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \ldots, \quad \dot{z}_{n-1} = z_n, \quad \dot{z}_n = f(z) + g(z)u, \tag{2}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in \Phi(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^n$, $f(z), g(z) \in C^\infty(\Phi(\Omega))$, причем система (2) регулярна в положении равновесия $z = 0$, т.е. $g(0) = \mathbf{B}\mathbf{A}^{n-1}\varphi(0) \neq 0$. В этом случае (2) можно стабилизировать при помощи управления

$$u(z) = \frac{1}{g(z)}\left(-f(z) - \sum_{i=1}^{n} k_{i-1} z_i\right), \tag{3}$$

где числа $k_0, \ldots, k_{n-1}$ таковы, что вещественные части всех корней уравнения

$$\lambda^n + k_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + k_1\lambda + k_0 = 0 \tag{4}$$

отрицательны. Оказывается, что управление (3) в переменных x

$$u^*(x) = u(\Phi(x)) = \frac{-f(\Phi(x)) - \sum\limits_{i=1}^{n} k_{i-1}\varphi_i(x)}{g(\Phi(x))} = \frac{-\mathbf{A}^n\varphi(x) - \sum\limits_{i=1}^{n} k_{i-1}\mathbf{A}^{i-1}\varphi(x)}{\mathbf{B}\mathbf{A}^{n-1}\varphi(x)}, \tag{5}$$

стабилизирует нулевое положения равновесия исходной системы (1).

Теорема 1. Нулевое положение равновесия системы (1), замкнутой управлением (5), асимптотически устойчиво. Если при этом $\Phi(\Omega) = \mathbb{R}^n$ и $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\mathbf{B}\mathbf{A}^{n-1}\varphi(x) \neq 0$, то оно глобально асимптотически устойчиво.

◀ Покажем сначала, что управление (3) стабилизирует систему канонического вида. Замкнув управлением (3) систему (2), получим линейную систему

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{z}_1 & = & z_2, \\ & \vdots & \\ \dot{z}_{n-1} & = & z_n, \\ \dot{z}_n & = & -k_0 z_1 - k_1 z_2 - \ldots - k_{n-1} z_n, \end{array}\right.$$

или

$$\dot{z} = Kz, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -k_0 & -k_1 & \ldots & -k_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Систему (6) можно записать в виде дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + k_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + k_1\dot{y} + k_0 y = 0, \quad y = z_1, \ldots, y^{(n-1)} = z_n. \tag{7}$$

Поскольку все корни характеристического уравнения (4) имеют отрицательные вещественные части, нулевое решение (7) асимптотически устойчиво.

Для линейной асимптотически устойчивой системы (6) существует функция Ляпунова в виде квадратичной формы

$$v(z) = z^T V z, \quad V \in M_n(\mathbb{R}), \quad V^T = V > 0,$$

$\dot{v}(z)|_{(6)} = z^T(P^T V + VP)z < 0$ при $x \neq 0$. Покажем, что функция $w(x) = v(\Phi(x))$ будет функцией Ляпунова для исходной системы (1), замкнутой управлением (5), т.е. системы

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u^*(x). \tag{8}$$

Так как $\Phi(0) = 0$, то $w(0) = (\Phi(0))^T V \Phi(0) = 0$. Вследствие взаимной однозначности $\Phi(x)$ $\forall x \neq 0\, \Phi(x) \neq 0$; $v(z) > 0$ для всех ненулевых z, поэтому $w(x)$ положительно определена. Кроме того, $w(x) \in C^\infty(\Omega)$ как композиция гладких функций. Осталось доказать, что $\dot{w}(x)|_{(8)}$ отрицательно определена. Действительно, по формуле производной сложной функции

$$\dot{w}(x)|_{(8)} = \frac{\partial v}{\partial z}(\Phi(x))\frac{\partial \Phi}{\partial x}\, \dot{x}|_{(8)} = \frac{\partial v}{\partial z}(\Phi(x))\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,(A(x) + B(x)u^*(x)) = \left.\frac{\partial v}{\partial z}\dot{\Phi}(x)\right|_{(8)} = \dot{v}(\Phi(x))|_{(8)} =$$

$$= (\Phi(x))^T(P^T V + VP)\Phi(x).$$

Докажем теперь, что при выполнении условий $\Phi(\Omega) = \mathbb{R}^n$ и $\forall x \in \mathbb{R}^n\, g(z) \neq 0$ нулевое решение исходной системы глобально асимптотически устойчиво. Достаточно заметить, что для любого решения замкнутой системы $x(t)$ из непрерывности $\Phi^{-1}(z)$ и того факта, что $\lim_{t\to+\infty} z(t) = 0$, $z(t) = \Phi(x(t))$, следует

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{z\to 0} \Phi^{-1}(z) = 0. \quad \blacktriangleright$$

Изложенную процедуру нахождения стабилизирующего управления (5) будем называть *методом линеаризации обратной связью.*

Пример 1. Решим задачу стабилизации нулевого положения равновесия аффинной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_1x_2 - 2x_1u. \end{cases}$$

Одним из решений уравнения

$$\mathbf{B}\varphi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - 2x_1\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0;$$

является $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 = \varphi_1$; тогда $\mathbf{A}\varphi(x_1, x_2) = x_1 = \varphi_2$. Заметим, что $\mathbf{A}^2\varphi = x_2$, $\mathbf{BA}\varphi = 1$. Стабилизирующее управление (5) примет вид

$$u^*(x) = \frac{-\mathbf{A}^2\varphi - k_0\varphi_1 - k_1\varphi_2}{\mathbf{BA}\varphi} = -x_2 - k_0(x_1^2 + x_2) - k_1x_1, \quad k_0 > 0,\ k_1 > 0.$$

Коэффициент при управлении в каноническом виде $\mathbf{BA}\varphi \neq 0$, область значения отображения $\Phi(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, поэтому найденное управление глобально асимптотически стабилизирует нулевое положение равновесия исходной системы.

2 Стабилизация линейных систем

Перейдём к рассмотрению задачи стабилизации для частного случая аффинных систем — линейных стационарных систем с управлением

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Для таких систем

$$\mathbf{A}(x) = Ax = (a_1(x), \ldots, a_n(x))^T, \quad a_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \mathbf{B}(x) = B.$$

Выясним сначала, в каком случа система (9) приводится к каноническому виду.

Теорема 2. Система (9) эквивалентна регулярной системе канонического вида

$$\dot{z}_1 = z_2, \ldots, \dot{z}_n = f_1 z_1 + \ldots + f_n z_n + gu, \quad g \neq 0 \tag{10}$$

тогда и только тогда, когда её матрица управляемости $U = (B|AB|\ldots|A^{n-1}B)$ невырожденна.

◀ *Достаточность.* Пусть $\det U \neq 0$.Очевидно, что искомая замена должна быть линейной, т.е. иметь вид $z = Px$, $\det P \neq 0$, значит, $\varphi(x)$ тоже долна быть линейной:

$$\varphi(x) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = cx, \quad c = (c_1, \ldots, c_n) \neq 0.$$

Тогда $\dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = c$. Выпишем условия на функцию φ из теоремы об эквивалентности системе канонического вида. Для линейной системы

$$\mathbf{A}\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i a_{ij} x_j = cAx;$$

$$\mathbf{A}^2\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial \mathbf{A}\varphi(x)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [CA]_i a_{ij} x_j = cA^2 x;$$

аналогично $\mathbf{A}^k\varphi(x) = cA^k x$, $k \in \mathbb{N}$. С другой стороны,

$$\mathbf{B}\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} b_i c_i = cB;$$

$$\mathbf{BA}\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial \mathbf{A}\varphi(x)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} b_i [cA]_i = cAB;$$

аналогично $\mathbf{BA}^k\varphi(x) = cA^k B$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда условие $\mathbf{BA}^i\varphi(x) = 0$, $i = 0, \ldots, n-2$ можно записать в виде СЛАУ[1] относительно элементов неизвестной строки c

$$c(B|AB|\ldots|A^{n-2}B) = 0. \tag{11}$$

Эта СЛАУ всегда имеет ненулевое решение $\tilde{c}$, причём $\tilde{c}A^{n-1}B \neq 0$, поскольку иначе оказалось бы, что СЛАУ $cU = 0$ имеет ненулевое решение $\tilde{c}$, следовательно, матрица U вырождена, что противоречит условию теоремы.

[1]СЛАУ можно записывать не только в привычном виде $Ax = b$, где x и b — столбцы; после транспонирования обеих частей СЛАУ можно получить эквивалентную запись $x^T A^T = b^T$, где x^T и b^T — строки.

Мы получили замену

$$z_1 = \varphi(x) = \tilde{c}x, \quad z_2 = \mathbf{A}\varphi(x) = \tilde{c}Ax, \quad \ldots, \quad z_n = \mathbf{A}^{n-1}\varphi(x)\tilde{c}A^{n-1}x$$

или, в матричном виде,

$$z = Px, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{c}A \\ \vdots \\ \tilde{c}A^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим произведение

$$PU = \begin{pmatrix} \tilde{c} \\ \tilde{c}A \\ \vdots \\ \tilde{c}A^{n-1} \end{pmatrix} \left(B|AB|\ldots|A^{n-1}B\right).$$

Имеем

$$[PU]_{ij} = \tilde{c}A^{i-1}A^{j-1}B = \tilde{c}A^{i+j-2}B = \begin{cases} 0, & i+j-2 < n-1; \\ \tilde{c}A^{n-1}B \neq 0, & i+j-2 = n-1; \\ \tilde{c}A^{i+j-2}B, & i+j-2 > n-1. \end{cases}$$

Это означает, что все элементы PU выше побочной диагонали равны нулю, а элементы на побочной диагонали равны $cA^{n-1}B \neq 0$:

$$PU = \begin{pmatrix} \tilde{c}AB & \tilde{c}A^2B & \ldots & \tilde{c}A^{n-1}B \\ \tilde{c}A^2B & \tilde{c}A^3B & \ldots & \tilde{c}A^nB \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \tilde{c}A^{n-1}B & \tilde{c}A^nB & \ldots & \tilde{c}A^{2n-2}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \tilde{c}A^{n-1}B \\ 0 & 0 & \ldots & \tilde{c}A^{n-1}B & \tilde{c}A^nB \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{c}A^{n-1}B & \ldots & \tilde{c}A^{2n-4}B & \tilde{c}A^{2n-3}B \\ \tilde{c}A^{n-1}B & \tilde{c}A^nB & \ldots & \tilde{c}A^{2n-3}B & \tilde{c}A^{2n-2}B \end{pmatrix}.$$

Последовательно раскладывая определитель PU по первому столбцу или по первой строке, получим

$$\det PU = \det P \det U = (-1)^{n+1}(\tilde{c}A^{n-1}B)^n \neq 0. \tag{12}$$

Отсюда $\det P \neq 0$, следовательно, отображение $z = Px$ взаимно однозначно и является диффеоморфизмом $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, следовательно, выполняются условия теоремы об эквивалентности системе канонического вида. При этом $f(z) = f_1z_1 + \ldots + f_nz_n = \mathbf{A}^n\varphi(x) = \tilde{c}A^nx = \tilde{c}A^nP^{-1}z$, $g = \mathbf{BA}^{n-1}\varphi(x) = \tilde{c}A^{n-1}B \neq 0$.

Необходимость. Пусть теперь (9) эквивалентна (10), $g \neq 0$. Тогда справедливы все проделанные ранее рассуждения, с тем отличием, что $\tilde{c}A^{n-1}B \neq 0$, поскольку $\tilde{c}A^{n-1}B = g$, поэтому из (12) $\det U \neq 0$. ▶

Теорема 3. *(Формула Аккермана.)* Пусть матрица управляемости системы (9) невырождена. Тогда управление $u = -Kx$, где

$$K = (0\ldots01)U^{-1}P(A), \quad P(A) = A^n + k_{n-1}A^{n-1} + \ldots + k_1A + k_0E$$

обладает следующим свойством: характеристические числа замкнутой системы

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

совпадают с корнями многочлена

$$P(\lambda) = \lambda^n + k_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + k_1\lambda + k_0.$$

◀ Поскольку $\det U \neq 0$, система приводится к каноническому виду (10). При этом $f = (f_1, \ldots, f_n) = \tilde{c}A^n$, $g = \mathbf{B}\mathbf{A}^{n-1}\varphi(x) = \tilde{c}A^{n-1}B \neq 0$, где $\tilde{c}$ — решение СЛАУ (11). Выберем в соответствии с теоремой 1

$$u = \frac{1}{\tilde{c}A^{n-1}B}\left(-\tilde{c}A^n x - kz\right), \quad k = (k_0, \ldots, k_{n-1}),$$

или, чтото же самое,

$$u = \frac{1}{\tilde{c}A^{n-1}B}\left(-\tilde{c}A^n x - kPx\right) = \frac{1}{\tilde{c}A^{n-1}B}\left(-\tilde{c}A^n - kP\right)x =$$

$$= \frac{1}{\tilde{c}A^{n-1}B}\left(-\tilde{c}A^n - k_{n-1}\tilde{c}A^{n-1} - \ldots - k_0\tilde{c}E\right)x = \frac{-1}{\tilde{c}A^{n-1}B}\tilde{c}\left(A^n + k_{n-1}A^{n-1} + \ldots + k_0E\right)x =$$

$$= \frac{-1}{\tilde{c}A^{n-1}B}\tilde{c}P(A)x.$$

Осталось доказать, что $\dfrac{1}{\tilde{c}A^{n-1}B}\tilde{c} = (0\ldots01)U^{-1}$. Имеем

$$\tilde{c}U = \tilde{c}(B|AB|\ldots|A^{n-1}B) = (0\ldots0\tilde{c}A^{n-1}B).$$

Осталось сказать, что поскольку матрицы исходной и канонической систем, замкнутых нашим управлением, подобны, их характеристические числа совпадают. ▶

3 Преобразование к каноническому виду аффинных систем с векторным управлением

Многомерными аффинными стационарными системами или аффинными стационарными системами с векторным управлением называют системы вида

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{13}$$

где $A(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))^T$ — гладкая векторная функция в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, а $B(x) = (B_1(x), \ldots, B_m(x)) = (b_{ij}(x))$ — функциональная матрица типа $n \times m$ с гладкими в Ω элементами $b_{ij}(x)$, k-ый столбец которой обозначен через $B_k(x)$, $k = \overline{1, m}$.

Пусть размерность n пространства состояний системы (13) представлена в виде суммы m целых положительных чисел:

$$n = n_1 + \cdots + n_m. \tag{14}$$

В соответствии с этим разложением переменные $z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ разобьём на m групп

$$z = (z^1, \ldots, z^m)^T,$$

где

$$z^1 = (z_1^1, \ldots, z_{n_1}^1)^T \in \mathbb{R}^{n_1}, \ldots, z^m = (z_1^m, \ldots, z_{n_m}^m)^T \in \mathbb{R}^{n_m}.$$

Если аффинная система с векторным управлением в этих переменных имеет вид

$$
\begin{array}{l}
\dot z_1^1 = z_2^1, \quad \ldots, \quad \dot z_{n_1-1}^1 = z_{n_1}^1, \quad \dot z_{n_1}^1 = f_1(z) + \sum\limits_{j=1}^{m} g_{1j}(z)u_j, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dot z_1^m = z_2^m, \quad \ldots, \quad \dot z_{n_m-1}^m = z_{n_m}^m, \quad \dot z_{n_m}^m = f_m(z) + \sum\limits_{j=1}^{m} g_{mj}(z)u_j,
\end{array}
\tag{15}
$$

где $f(z), g(z) \in C^\infty(Z)$, область $Z \subset \mathbb{R}^n$, то ее называют *системой канонического вида типа* $(n_1, \ldots, n_m)$, а переменные z — *каноническими переменными.*

Систему канонического вида (15) с векторным управлением можно записать в более компактном виде. Для этого введем *фазовые переменные* y_i, $\dot y_i$,..., $y_i^{(n_i-1)}$, $i = \overline{1,m}$ полагая

$$
y_i = z_1^i, \quad \dot y_i = z_2^i, \quad \ldots, \quad y_i^{(n_i-1)} = z_{n_i}^i,
$$

и вместо системы (15) получим систему из m уравнений

$$
\begin{array}{l}
y_1^{(n_1)} = f_1(\overline{y}) + \sum\limits_{j=1}^{m} g_{1j}(\overline{y})u_j, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_m^{(n_m)} = f_m(\overline{y}) + \sum\limits_{j=1}^{m} g_{mj}(\overline{y})u_j,
\end{array}
\tag{16}
$$

где

$$
\overline{y} = (\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m)^T \in \mathbb{R}^n, \quad \overline{y}_i = (y_i, \dot y_i, \ddot y_i, \ldots, y_i^{(n_i-1)}),\ i = \overline{1,m},
$$

а функции $f_i(\overline{y})$, $g_{ij}(\overline{y})$ гладкие в области $Y \subset \mathbb{R}^n$, которая соответствует Z. Эту систему тоже будем называть системой канонического вида.

Теорема 4. Для того, чтобы для аффинной нестационарной системы (13) в области Ω существовали канонические переменные в которых она имеет канонический вид (15) необходимо и достаточно существования таких функций $\varphi_i(x) \in C^\infty(\Omega)$, $i = \overline{1,m}$, которые в Ω являются решением системы уравнений в частных производных

$$
\mathbf{B}_j \mathbf{A}^k \varphi_i(x) = 0, \qquad k = \overline{0, n_i-2}, \quad i,j = \overline{1,m},
\tag{17}
$$

и для которых соотношения

$$
z_k^i = \mathbf{A}^{k-1}\varphi_i(x), \quad k = \overline{1, n_i}, \quad i = \overline{1,m},
\tag{18}
$$

задают в Ω гладкую невырожденную замену переменных $z = \Phi(x)$.

В этих переменных аффинная система имеет канонический вид (15), причем

$$
f_i(z,t) = \mathbf{A}^{n_i}\varphi_i(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)},\ i = \overline{1,m}, \quad g_{ij}(z) = \mathbf{B}_j\mathbf{A}^{n_i-1}\varphi_i(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)},\ i,j = \overline{1,m},
$$

где $x = \Phi^{-1}(z)$ обратная замена переменных.

Теорема 5. Для того, чтобы для аффинной нестационарной системы (13) в области Ω существовали канонические переменные в которых она имеет канонический вид (15) необходимо и достаточно существования таких функций $\varphi_i(x) \in C^\infty(\Omega)$, $i = \overline{1,m}$, которые в Ω являются решением системы уравнений в частных производных первого порядка

$$
\mathrm{ad}_{\mathbf{A}}^k \mathbf{B}_j \varphi_i(x) = 0, \qquad k = \overline{0, n_i-2}, \quad i,j = \overline{1,m},
\tag{19}
$$

и для которых соотношения

$$z_k^i = \mathbf{A}^{k-1}\varphi_i(x), \quad k = \overline{1, n_i}, \quad i = \overline{1, m}, \tag{20}$$

задают в Ω гладкую невырожденную замену переменных $z = \Phi(x)$.

В этих переменных аффинная система имеет канонический вид (15), причем

$$f_i(z,t) = \mathbf{A}^{n_i}\varphi_i(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)},\ i = \overline{1, m}, \quad g_{ij}(z) = \mathbf{B}_j\mathbf{A}^{n_i-1}\varphi_i(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)},\ i, j = \overline{1, m},$$

где $x = \Phi^{-1}(z)$ обратная замена переменных.

Для того, чтобы преобразовать аффинную систему к каноническому виду, необходимо найти из системы уравнений в частных производных (19) функции $\varphi_i(x)$. При этом тип эквивалентной системы канонического вида, а значит и вид уравнений (19), заранее неизвестен. Как определить, к какому типу канонического вида следует приводить нашу систему?

Оказывается, что фиксированная система (13) может быть эквивалентна системам канонического вида только одного типа (или не эквивалентна ни одной системе канонического вида). Чтобы определить, к какому типу канонического вида следует приводить аффинную систему, можно воспользоваться изложенным ниже алгоритмом.

Обозначим через U_j^k столбец координат векторного поля $(-1)^k \mathrm{ad}_{\mathbf{A}}^k \mathbf{B}_j$, где $k = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{1, m}$. Введём также матрицы

$$U^i(x) = (U_1^0, \ldots, U_m^0, \ldots\ldots, U_1^i, \ldots, U_m^i), \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Матрицу $U(x) = U^{n-1}(x)$ называют *матрицей управляемости* многомерной аффинной нестационарной системы (13).

Предположим, что для аффинной системы с n переменными состояния и m управлениями при $k = \overline{0, s-1}$ были вычислены матрицы $U^k(x)$ и оказалось, что в окрестности некоторой точки все они инволютивны и их ранги имеют постоянные значения, причём

$$\mathrm{rank} U^0(x) = m, \quad \mathrm{rank} U^k(x) < n \text{ при } k < s-1, \text{ а } \quad \mathrm{rank} U^{s-1}(x) = n.$$

Будем искать разложение (14) в виде q попарно различных чисел, которые обозначим в порядке убывания через $l_1 > l_2 > \cdots > l_q$, и пусть r_i — "кратность"числа l_i, означающая количество слагаемых в сумме $n_1 + \cdots + n_m$, равных l_i. Иначе говоря, будем искать разложение числа n на m слагаемых в виде

$$n = r_1 l_1 + \cdots + r_q l_q.$$

Числа r_i и l_i удобно находить, заполняя следующую таблицу, в верхней строке которой указаны формулы для вычисления элементов соответствующего столбца.

i	$\mathrm{rank} U^{i-1}$	$d_{i3} = \mathrm{rank} U^{i-1} - \mathrm{rank} U^{i-2}$	$d_{i4} = d_{i3} - r_1$	$d_{i5} = d_{i4} - r_2$
1	m	m	$m - r_1$	$m - r_1 - r_2$
$\ldots$	$*$	$*$	$*$	$*$
i_3	$*$	$*$	$*$	$r_3 \neq 0 \;\Rightarrow\; l_3 = i_3$
$\ldots$	$*$	$*$	$*$	0
i_2	$*$	$*$	$r_2 \neq 0 \;\Rightarrow\; l_2 = i_2$	0
$\ldots$	$*$	$*$	0	
$\ldots$	$*$	$*$	$\ldots$	
$\ldots$	$*$	$*$	0	
s	n	$r_1 \;\Rightarrow\; l_1 = s$	0	

Во втором столбце в строке с номером i записан ранг матрицы $U^{i-1}(x)$. Заполнение второго столбца начинается с числа $m = \mathrm{rank} U^0(x)$ и продолжается до тех пор, пока в строке s не появится число $n = \mathrm{rank} U^{s-1}(x)$. Символ $*$ обозначает в таблице числа, которые появляются в результате ее заполнения.

Третий столбец заполняется по следующему правилу: в i-ой его строке записывается число

$$d_{i3} = d_{i2} - d_{i-1,2} = \mathrm{rank} U^{i-1}(x) - \mathrm{rank} U^{i-2}(x),$$

причём считается, что $d_{0,2} = \mathrm{rank} U^{-1}(x) = 0$. Последний элемент этого столбца тогда равен r_1, а номер строки, в которой он стоит, равен l_1, т.е. $l_1 = s$.

Элементы четвертого столбца находятся по формуле: $d_{i4} = d_{i3} - r_1$, $i = \overline{1, l_1}$. Последний ненулевой элемент этого столбца равен r_2, а номер строки, в которой он стоит, равен l_2. Аналогично четвертому столбцу заполняются следующие столбцы таблицы и находятся остальные числа r_i, l_i. Всего в таблице может быть не более чем $m + 2$ ненулевых столбца.

Пример 2. Найдём преобразование, приводящее к эквивалентному каноническому виду систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \cos x_3 + u_1 - u_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_4 + u_1 \\ \dot{x}_3 &= x_2 - \cos x_3 + u_2 \\ \dot{x}_4 &= x_1 + u_1. \end{cases}$$

Для этой системы $n = 4$, $m = 2$. Выясним, к каноническому виду какого типа она может быть приведена.

$$U^0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank} U^0 = 2.$$

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}_1] = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ [\mathbf{A}, \mathbf{B}_1] = \begin{pmatrix} \sin x_3 \\ 1 \\ -\sin x_3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad U^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \sin x_3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\sin x_3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \mathrm{rank} U^1 = 4 = n.$$

Очевидно, что ранг матрицы U^2 не более 4, т.к. она имеет 4 строки, но и не менее 4 — ведь матрица U^1 является её составной частью. Исходя из этого получаем таблицу

i	$\mathrm{rank} U^{i-1}$	$d_{i3} = \mathrm{rank} U^{i-1} - \mathrm{rank} U^{i-2}$
1	2	2
$l_1 = 2$	4	$r_1 = 2$
3	4	0

откуда $l_1 = 2$, $r_1 = 2$. Таким образом, имеем канонический вид типа (2,2). Получим этот канонический вид.

Выясним, сколько функционально независимых решений имеет система

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 \varphi &= 0 \\ \mathbf{B}_2 \varphi &= 0. \end{cases}$$

Видим, что $[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2] = 0$, поэтому система имеет $4-2=2$ функционально независимых решения. Найдём их:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_4} &= 0 \\[2ex] -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} &= 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \varphi = F(x_1 - x_2 + x_3, x_2 - x_4).$$

Пусть $z_1 = x_1 - x_2 + x_3$, $z_3 = x_2 - x_4$; тогда

$$z_2 = \dot{z}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 + \dot{x}_3 = \cos x_3 + u_1 - u_2 - (x_1 + x_4 + u_1) + x_2 - \cos x_3 + u_2 = -x_1 + x_2 - x_4;$$

$$z_4 = \dot{z}_3 = \dot{x}_2 - \dot{x}_4 = x_1 + x_4 + u_1 - (x_1 + u_1) = x_4.$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \Omega = \mathbb{R}^4.$$

Обратная замена

$$x_1 = z_3 - z_2, \quad x_2 = z_3 + z_4, \quad x_3 = z_1 + z_2 + z_4, \quad x_4 = z_4.$$

$$\begin{gathered} \dot{z}_2 = -\dot{x}_1 + \dot{x}_2 - \dot{x}_4 = -(\cos x_3 + u_1 - u_2) + x_1 + x_4 + u_1 - (x_1 + u_1) = -\cos x_3 + x_4 - u_1 + u_2 = \\ = -\cos(z_1 + z_2 + z_4) + z_4 - u_1 + u_2; \\ \dot{z}_4 = \dot{x}_4 = x_1 + u_1 = -z_2 + z_3 + u_1. \end{gathered}$$

Таким образом, в новых переменных z_1, z_2, z_3, z_4 система имеет канонический вид

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\cos(z_1 + z_2 + z_4) + z_4 - u_1 + u_2 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= -z_2 + z_3 + u_1. \end{cases}$$

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 - 2x_4 + u_1 + (x_3 - 1)u_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_4 - u_2 \\ \dot{x}_4 &= 2x_1 - 2x_4 - u_2. \end{cases}$$

Состояние $(0,0,0,0)$ является её положением равновесия. Покажем, как при помощи преобразования к каноническому виду можно построить управление, глобально асимптотически стабилизирующее это положение равновесия.

Выясним, к каноническому виду какого типа может быть преобразована наша система. Нетрудно получить, что

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}_1] = (-2,\ -1,\ -1,\ -2)^T, \quad [\mathbf{A}, \mathbf{B}_2] = (x_1 - x_4 - 2x_3,\ -x_3,\ -x_3,\ -2x_3)^T,$$

откуда

$$U^0 = \begin{pmatrix} 1 & x_3 - 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank} U^0 = 2; \quad \operatorname{rank} U^1 = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & x_3 - 1 & 2 & x_4 - x_1 + 2x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & -1 & 1 & x_3 \\ 0 & -1 & 2 & 2x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank} U^1 = 3,$$

т.к. $[\mathbf{A}, \mathbf{B}_2] = x_3[\mathbf{A}, \mathbf{B}_1] + (x_1 - x_4)\mathbf{B}_1$ и поэтому четвёртый столбец есть линейная комбинация первого и третьего.

Считать полностью матрицу U^2 нет необходимости; достаточно заметить, что её ранг не менее ранга её части:

$$\mathrm{rank} U^2 \geqslant \mathrm{rank} \begin{pmatrix} 1 & x_3 - 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 4,$$

где последний столбец есть координаты векторного поля $\mathrm{ad}^2_{\mathbf{A}}\mathbf{B}_1 = [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}_1]]$.

Получаем таблицу

i	$\mathrm{rank} U^{i-1}$	$d_{i3} = \mathrm{rank} U^{i-1} - \mathrm{rank} U^{i-2}$	$d_{i4} = d_{i3} - r_1$
$l_2 = 1$	2	2	$r_2 = 1 \neq 0$
2	3	1	0
$l_1 = 3$	4	$r_1 = 1$	0

Таким образом, имеем канонический вид типа (3,1). Приведём нашу систему к каноническому виду.

Выясним, сколько функционально независимых решений имеет система

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1\varphi_1 & = & 0 \\ \mathbf{B}_2\varphi_1 & = & 0 \\ [\mathbf{A}, \mathbf{B}_1]\varphi_1 & = & 0 \\ [\mathbf{A}, \mathbf{B}_2]\varphi_1 & = & 0. \end{cases}$$

Как мы уже выяснили, $[\mathbf{A}, \mathbf{B}_2] = x_3[\mathbf{A}, \mathbf{B}_1] + (x_1 - x_4)\mathbf{B}_1$, поэтому последнее уравнение из системы можем удалить. Проверим инволютивность распределения, порождаемого векторными полями, соответствующими уравнениям системы:

$$[\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2] = [\mathbf{B}_1, [\mathbf{A}, \mathbf{B}_1]] = (0,\ 0,\ 0,\ 0)^T; \quad [\mathbf{B}_2, [\mathbf{A}, \mathbf{B}_1]] = (1,\ 0,\ 0,\ 0)^T = \mathbf{B}_1.$$

Т.о. система

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & & & & = & 0 \\ (x_3 - 1)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & & -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} & -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_4} & = & 0 \\ 2\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & +\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} & +\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} & +2\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_4} & = & 0 \end{cases}$$

имеет одно функционально независимое решение. Решая её, получаем

$$\varphi = x_2 + x_3 - x_4.$$

Тогда

$$z_1 = x_2 + x_3 - x_4, \quad z_2 = \dot{x}_2 + \dot{x}_3 - \dot{x}_4 = -x_3 + x_4, \quad z_3 = -\dot{x}_3 + \dot{x}_4 = x_1 - x_4.$$

В качестве z_4 можем выбрать любую такую функцию от x, что замена $z = \Phi(x)$ будет гладкой невырожденной. Например, $z_4 = x_3$.

Обратная замена

$$x_1 = z_2 + z_3 + z_4, \quad x_2 = z_1 + z_2, \quad x_3 = z_4, \quad x_4 = z_2 + z_4.$$

В результате получаем систему канонического вида

$$\begin{cases} \dot z_1 &= z_2 \\ \dot z_2 &= z_3 \\ \dot z_3 &= z_1 + z_2 + u_1 + z_4 u_2 \\ \dot z_4 &= z_3 - u_2, \end{cases}$$

эквивалентную исходной на множестве $\Omega = \mathbb{R}^4$.

Чтобы стабилизировать нулевое положение равновесия исходной системы, надо получить управление, стабилизирующее его образ $\Phi(0) = 0$ в системе канонического вида, а затем записать полученное управление в исходных переменных. Выберем $u_2 = z_3 - k_4 z_4$, а $u_1 = -z_1 - z_2 - z_4 u_2 + k_1 z_1 + k_2 z_2 + k_3 z_3 = -z_4(z_3 - k_4 z_4) + (k_1 - 1)z_1 + (k_2 - 1)z_2 + k_3 z_3$, тогда замкнутая система канонического вида будет линейной стационарной:

$$\begin{cases} \dot z_1 &= z_2 \\ \dot z_2 &= z_3 \\ \dot z_3 &= k_1 z_1 + k_2 z_2 + k_3 z_3 \\ \dot z_4 &= k_4 z_4. \end{cases}$$

Эта система может быть разбита на два дифференциальных уравнения

$$\dddot y = k_1 y + k_2 \dot y + k_3 \ddot y \quad \text{и} \quad \dot\zeta = k_4 \zeta,$$

где $y = z_1$, $\dot y = z_2$, $\ddot y = z_3$, $\zeta = z_4$. При соответствующем подборе коэффициентов $k_i = k_i^s$, $i = \overline{1,4}$, нулевое решение этих уравнений асимптотически устойчиво.

Теперь сделаем в формулах для управления обратную замену переменных и получим стабилизирующее управление

$$u_1 = -x_3(x_1 - x_4 - k_4^s x_3) + (k_1^s - 1)(x_2 + x_3 - x_4) + (k_2^s - 1)(-x_3 + x_4) + k_3^s(x_1 - x_4),$$

$$u_2 = x_1 - x_4 - k_4^s x_3.$$

Пример 4. Выясним, к каноническому виду какого типа приводится линейная система

$$\begin{cases} \dot x_1 &= 2x_1 + x_4 + u_2 \\ \dot x_2 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot x_3 &= -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + u_1 \\ \dot x_4 &= -x_1 - x_4 - u_2 \\ \dot x_5 &= -x_1 + x_2 - x_4 - x_5. \end{cases}$$

Запишем векторные поля

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \\ -x_1 - x_4 \\ -x_1 + x_2 - x_4 - x_5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя все необходимые коммутаторы, получим

$$U^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank} U^0 = 2; \qquad U^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank} U^1 = 4.$$

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{rank} U^2 = 5.$$

Получаем таблицу

i	$\mathrm{rank}U^{i-1}$	$d_{i3} = \mathrm{rank}U^{i-1} - \mathrm{rank}U^{i-2}$	$d_{i4} = d_{i3} - r_1$
1	2	2	1
$l_2 = 2$	4	2	$r_2 = 1 \neq 0$
$l_1 = 3$	5	$r_1 = 1$	0

Таким образом, имеем канонический вид типа (3,2).

Упражнение. Может ли линейная система $\dot{x} = Bu$, где $B \in M_{nm}(\mathbb{R})$, $u \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $m < n$ быть эквивалентна какой-нибудь системе канонического вида? А система вида $\dot{x} = Ex + Bu$, где E — единичная матрица порядка n?

4 Терминальная задача

Рассмотрим *терминальную задачу* для аффинной стационарной системы

$$\dot{x} = A(x) + B(x)u. \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m. \tag{21}$$

Пусть в момент времени $t = 0$ система находится в состоянии

$$x(0) = x_0. \tag{22}$$

Найдём такое кусочно–непрерывное управление $u = u(t)$, $t \in T = [0, \ t_*]$, что в заданный момент времени t_* система будет находиться в заданном конечном состоянии

$$x(t_*) = x_*. \tag{23}$$

4.1 Терминальная задача для систем со скалярным управлением.

Рассмотрим сначала случай скалярного управления.

Относительно аффинной системы (21) будем предполагать, что на открытом подмножестве Ω допустимых состояний, содержащем начальное x_0 и конечное x_* состояния, она эквивалентна системе канонического вида

$$y^{(n)} = f(\overline{y}) + g(\overline{y})u, \quad \overline{y} = (y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n, \tag{24}$$

заданной на всем пространстве $\mathbb{R}^n$.

Потребуем также, чтобы система (24) была регулярна на всём множестве $\mathbb{R}^n$, т.е.

$$\forall \overline{y} \in \mathbb{R}^n \quad g(\overline{y}) \neq 0.$$

Отображение $\Phi : \Omega \to \Phi(\Omega) = \mathbb{R}^n$ позволяет сформулировать для системы канонического вида эквивалентную терминальную задачу: найти кусочно–непрерывное управление $u = u(t)$, $t \in T = [0, \ t_*]$, переводящее систему канонического вида за тот же интервал времени T из начального состояния

$$\overline{y}(0) = \Phi(x_0) = \overline{y}_0 = (y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \tag{25}$$

в конечное состояние

$$\overline{y}(t_*) = \Phi(x_*) = \overline{y}_* = (y_*, \dot{y}_*, \dots, y_*^{(n-1)}). \tag{26}$$

Решение этой терминальной задачи одновременно является и решением исходной терминальной задачи для аффинной системы, так как при переходе к эквивалентной системе канонического вида управление и время не преобразуются, а отображение Φ^{-1} отображает траектории системы канонического вида в траектории аффинной системы, реализуемые теми же управлениями.

Покажем, что если удастся найти гладкую функцию $h(t) : T \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям (25) и (26), т.е.

$$h(0) = y_0, \quad \dot{h}(0) = \dot{y}_0, \quad \dots \quad , h^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$$

и

$$h(t_*) = y_*, \quad \dot{h}(t_*) = \dot{y}_*, \quad \dots \quad , h^{(n-1)}(t_*) = y_*^{(n-1)},$$

то можно построить и управление, решающее терминальную задачу. Рассмотрим управление

$$u(t, \overline{y}) = \frac{1}{g(\overline{y})} \left(-f(\overline{y}) + h^{(n)}(t) \right). \tag{27}$$

Замкнутая им система (24) будет иметь вид

$$y^{(n)} = h^{(n)}(t).$$

Это означает, что при выполнении начальных условий (25) она будет иметь решение

$$y(t) = h(t), \quad \dot{y}(t) = \dot{h}(t), \quad \dots \quad y^{(n-1)}(t) = h^{(n-1)}(t). \tag{28}$$

Но это будет означать выполнение условий (26). Итак, управление (27) решает рассматриваемую терминальную задачу.

Можно избавиться от состояния в управлении, если учесть, что при движении по заданной траектории $\overline{h}(t) = (h(t), \dot{h}(t), \dots, h^{(n)}(t))$ будут выполняться равенства (28). Тогда получим терминальное управление

$$u(t) = \frac{1}{g(\overline{h}(t))} \left(-f(\overline{h}(t)) + h^{(n)}(t) \right). \tag{29}$$

Осталось найти функцию $h(t)$, удовлетворяющую (25)- (26). Можно искать её в виде многочлена степени $2n-1$

$$h(t) = \sum_{i=0}^{2n-1} a_i t^i.$$

Условия (25)- (26) для многочлена $h(t)$ можно записать в виде СЛАУ на его коэффициенты $a_0, \dots, a_{2n}$:

$$M_n(t_0, t_*) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \\ y_* \\ \vdots \\ y_*^{(n-1)} \end{pmatrix}, \tag{30}$$

где

$$M_n(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & \dots & a^{2n-1} \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 & \dots & (2n-1)a^{2n-2} \\ 0 & 0 & 2 & 6a & \dots & (2n-1)(2n-2)a^{2n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (2n-1)\dots(n+1)a^n \\ 1 & b & b^2 & b^3 & \dots & b^{2n-1} \\ 0 & 1 & 2b & 3b^2 & \dots & (2n-1)b^{2n-2} \\ 0 & 0 & 2 & 6b & \dots & (2n-1)(2n-2)b^{2n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (2n-1)\dots(n+1)b^n \end{pmatrix}.$$

$M_n(a,b)$ — блочная матрица, составленная из двух блоков размера $n \times 2n$. Первая строка первого блока составлена из одночленов a^{j-1}, где j — номер столбца. Каждая следующая строка содержит производные по a одночленов верхней строки. Аналогично построены строки второго блока, коэффициенты которого зависят от b. Может быть показано, что при $a \neq b$ $M_n(a,b)$ невырождена;

$$\det(M_n(a,b)) = (-1)^n D_n^2 (a-b)^{n^2}, \quad D_2 = 1,\ D_{n+1} = n!\, D_n.$$

Следовательно, для каждой терминальной задачи коэффициенты многочлена $h(t)$ определены однозначно.

Заметим, что требования $\Phi(\Omega) = \mathbb{R}^n$ и $\forall \overline{y} \in \Phi(\Omega)$ $g(\overline{y}) \neq 0$ в некоторых случаях могут быть излишними. Достаточно, чтобы кривая $\overline{y}(t) = \overline{h}(t)$, $t \in T$ полностью лежала в множестве $\Phi(\Omega)$ и во всех её точках $g(\overline{h}(t)) \neq 0$.

Пример 5. Построим управление, переводящее систему

$$\ddot{y} = \sin y + e^{-\dot{y}} u$$

из начального состояния $\overline{y}_0 = (1,0)^T$ в конечное состояние $\overline{y}_* = (3,5)^T$ за время $t_* = 1$.

Будем искать $h(t)$ в виде многочлена порядка 3:

$$h(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

Имеем $h(0) = a_0 = 1$, $\dot{h}(0) = a_1 = 0$, $h(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3$, $\dot{h}(1) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 = 5$.

Решая систему линейных уравнений, получаем $h(t) = 1 + t^2 + t^3$. Тогда $\dot{h}(t) = 2t + 3t^2$, $\ddot{h}(t) = 2 + 6t$,

$$u(t) = e^{\dot{h}(t)}(-\sin h(t) + \ddot{h}(t)) = e^{2t+3t^2}(-\sin(1 + t^2 + t^3) + 2 + 6t).$$

Пример 6. Построим програмное управление, переводящее систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & e^{-x_2} + u \\ \dot{x}_2 & = & e^{x_1 + x_2} \end{cases}$$

из начального состояния $\bar{x}_0 = \bar{x}(0) = (1,-1)^T$ в конечное состояние $\bar{x}_* = \bar{x}(1) = (\ln 4 - 1, 1)^T$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \varphi = x_2; \quad \dot{y} = \dot{x}_2 = e^{x_1 + x_2};$$

$$x_1 = \ln \dot{y} - y, \quad x_2 = y.$$

$$\ddot{y} = \frac{d}{dt}\left(e^{x_1+x_2}\right) = e^{x_1+x_2}\left(\dot{x}_1 + \dot{x}_2\right) = e^{x_1+x_2}\left(e^{-x_2} + u + e^{x_1+x_2}\right) = \dot{y}\left(e^{-y} + \dot{y} + u\right);$$

$\Omega = \mathbb{R}^2$, $\Phi(\Omega) = \{(y, \dot{y}) : \ \dot{y} > 0\}$. $\bar{y}_0 = (-1, 1)^T$, $\bar{y}_* = (1, 4)^T$.

Решая систему линейных уравнений, получаем $h(t) = -1 + t + t^3$. Тогда $\dot{h}(t) = 1 + 3t^2$, $\ddot{h}(t) = 6t$,

$$u(t) = -e^{-h(t)} - \dot{h}(t) + \frac{\ddot{h}(t)}{\dot{h}(t)} = -e^{1-t-t^3} - 1 - 3t^2 + \frac{6t}{1+3t^2}.$$

Заметим, что при $t \in [0, 1]$ $\dot{h}(t) > 0$, т.е. траектория лежит в $\Phi(\Omega)$.

4.2 Терминальная задача для систем с векторным управлением.

Пример 7. Построить программное управление, переводящее систему

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= & z_2 \\ \dot{z}_2 &= & z_2 + z_3 - u_1 + u_2 \\ \dot{z}_3 &= & z_4 \\ \dot{z}_4 &= & z_1 + 2u_1 \end{cases}$$

из начального состояния $\bar{z}_0 = \bar{z}(0) = (1, 0, 2, 0)^T$ в конечное состояние $\bar{z}_* = \bar{z}(2) = (2, 0, 4, 0)^T$.

Видим, что $n = 4$, $m = 2$, канонический вид типа (2,2).

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix};$$

система регулярна на $\mathbb{R}^4$. Для того, чтобы реализовать движение $z_1(t) = h_1(t)$, $z_2(t) = \dot{h}_1(t)$, $z_3(t) = h_2(t)$, $z_4(t) = \dot{h}_2(t)$ (при выполнении условий на концах временного отрезка), необходимо применить управление

$$u_T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -\dot{h}_1(t) - h_2(t) \\ -h_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \ddot{h}_1(t) \\ \ddot{h}_2(t) \end{pmatrix} \right).$$

Найдём коэффициенты $h_1(t)$ и $h_2(t)$.

$$h_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \ \ \dot{h}_1 = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2, \ \ \ddot{h}_1 = 2a_2 + 6a_3 t,$$

$$h_2(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3, \ \ \dot{h}_2 = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2, \ \ \ddot{h}_2 = 2b_2 + 6b_3 t.$$

Из начальных и конечных условий

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ 1 + 4a_2 + 8a_3 = 2 \\ 4a_2 + 12a_3 = 0 \\ b_0 = 2 \\ b_1 = 0 \\ 2 + 4b_2 + 8b_3 = 4 \\ 4b_2 + 12b_3 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $a_2 = 3/4$, $a_3 = -1/4$, $b_2 = 3/2$, $b_3 = -1/2$,

$$h_1(t) = 1 + \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}t^3, \quad h_2(t) = 2 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^3.$$

$$\dot{h}_1(t) = \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}t^2, \quad \dot{h}_2(t) = 3t - \frac{3}{2}t^2.$$

$$\ddot{h}_1(t) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}t, \quad \ddot{h}_2(t) = 3 - 3t.$$

ПОдставляя всё это в формулу для u_T, получим искомое терминальное управление

$$u_T = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -\left(\frac{3}{2}t - \frac{3}{4}t^2\right) - \left(2 + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^3\right) \\ -\left(1 + \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}t^3\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(1-t) \\ 3(1-t) \end{pmatrix} \right).$$

Пример 8. Построить програмное управление, переводящее систему

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_1 - z_4 + u_1 + z_2 u_2 \\ \dot{z}_4 &= z_3 + u_2 \end{cases}$$

из начального состояния $\bar{z}_0 = \bar{z}(0) = (-1, 0, 6, 1)^T$ в конечное состояние $\bar{z}_* = \bar{z}(1) = (3, 11, 26, 3)^T$.

Видим, что $n = 4$, $m = 2$, канонический вид типа (3,1).

$$G = \begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

система регулярна на $\mathbb{R}^4$. Для того, чтобы реализовать движение $z_1(t) = h_1(t)$, $z_2(t) = \dot{h}_1(t)$, $z_3(t) = \ddot{h}_1(t)$, $z_4(t) = h_2(t)$ (при выполнении условий на концах временного отрезка), необходимо применить управление

$$u_T = \begin{pmatrix} 1 & -\dot{h}_1(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -h_1(t) + h_2(t) \\ -\ddot{h}_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dddot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{pmatrix} \right).$$

Найдём коэффициенты $h_1(t)$ и $h_2(t)$.

$$h_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5, \ \ \dot{h}_1 = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4,$$
$$\ddot{h}_1 = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3, \ \ \dddot{h}_1 = 6a_3 + 24a_4 t + 60a_5 t^2, \ \ h_2(t) = b_1 + b_2 t, \ \ \dot{h}_2 = b_2.$$

Из начальных и конечных условий

$$\begin{cases} a_0 = -1 \\ a_1 = 0 \\ 2a_2 = 6 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 11 \\ 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 + 20a_5 = 26 \\ b_1 = 1 \\ b_1 + b_2 = 3. \end{cases}$$

Отсюда $h_1(t) = -1 + 3t^2 + t^5$, $h_2(t) = 1 + 2t$.

Пример 9. Построить программное управление, переводящее систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 - u_1 - u_2 \\ \dot{x}_2 &= 1 - x_1 + u_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 + u_1 + u_2 \\ \dot{x}_4 &= x_1 + x_3 - u_1 \end{cases}$$

из начального состояния $\bar{x}_0 = \bar{x}(0) = (-4, 0, -1, 1)^T$ в конечное состояние $\bar{x}_* = \bar{x}(1) = (-14, 6, 11, -1)^T$.

$$\mathbf{B}_1(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 1 - x_1 \\ x_4 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Видим, что $\mathrm{rank} U^0 = 2$,

$$U^1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rank} U^1 = 3.$$

Это значит, что система может приводиться только к каноническому виду типа (3,1). Найдём фанкцию $\varphi_1(x)$, являющуюся решением системы

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 \varphi_1 &= 0 \\ \mathbf{B}_2 \varphi_1 &= 0 \\ [\mathbf{A}, \mathbf{B}_1] \varphi_1 &= 0 \\ [\mathbf{A}, \mathbf{B}_2] \varphi_1 &= 0. \end{cases}$$

Коэффициенты уравнений этой системы есть элементы столбцов U^1; один столбец (например, третий) можем отбросить как линейно зависимый. Получим

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_4} &= 0 \\ -\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} &= 0 \\ -\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} &= 0. \end{cases}$$

Общее решение этой системы — $\varphi_1 = F(x_1 + x_3)$. Выберем $z_1 = x_1 + x_3$. Тогда

$$z_2 = \dot{z}_1 = \dot{x}_1 + \dot{x}_3 = x_2 + x_4,$$

$$z_3 = \dot{z}_2 = \dot{x}_2 + \dot{x}_4 = 1 + x_3.$$

Следует выбрать z_4 так, чтобы замена переменных была гладкой невырожденной. Выберем $z_4 = x_4$, тогда

$$x_1 = z_1 - z_3 + 1, \quad x_2 = z_2 - z_4, \quad x_3 = z_3 - 1, \quad x_4 = z_4.$$

В результате имеем канонический вид

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 + u_1 + u_2 \\ \dot{z}_4 &= z_1 - u_1 \end{cases}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

система регулярна на $\mathbb{R}^4$. Для того, чтобы реализовать движение $z_1(t) = h_1(t)$, $z_2(t) = \dot{h}_1(t)$, $z_3(t) = \ddot{h}_1(t)$, $z_4(t) = h_2(t)$ (при выполнении условий на концах временного отрезка), необходимо применить управление

$$u_T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -h_2(t) \\ -h_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dddot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{pmatrix} \right).$$

Найдём коэффициенты $h_1(t)$ и $h_2(t)$.

$$h_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5, \;\; \dot{h}_1 = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4,$$
$$\ddot{h}_1 = 2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + 20a_5 t^3, \;\; \dddot{h}_1 = 6a_3 + 24a_4 t + 60a_5 t^2, \;\; h_2(t) = b_1 + b_2 t, \;\; \dot{h}_2 = b_2.$$

Из начальных и конечных условий для задачи в исходных переменных получаем условия для задачи в канонических переменных:

$$\bar{z}_0 = (-5, 1, 0, 1)^T, \quad \bar{z}_* = (-3, 5, 12, -1);$$

$$\begin{cases} a_0 = -5 \\ a_1 = 1 \\ 2a_2 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = -3 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 5 \\ 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 + 20a_5 = 12 \\ b_1 = 1 \\ b_1 + b_2 = -1. \end{cases}$$

Отсюда $h_1(t) = -5 + t + t^4$, $h_2(t) = 1 - 2t$. Тогда

$$u_T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 + 2t + 24t \\ 5 - t - t^4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 + 26t \\ 3 - t - t^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + t + t^4 \\ 2 + 25t - t^4 \end{pmatrix}.$$