

# Задачи для подготовки к экзамену

по курсу «Практикум по математическим пакетам» 2-е образование 2-й семестр

1. Создайте Simulink-модель системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2 + \sin t \\ \dot{y} = -ax - y. \end{cases}$$

Произведите численное моделирование при различных значениях параметра  $a$  и различных начальных условиях, постройте интегральные кривые на плоскости  $(x, y)$  и графики  $x(t), y(t)$ .

2. При помощи среды MATLAB составьте программу для решения задач Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \sin(y^2), \end{cases} \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$

для разных значений  $x_0$  и  $y_0$ . Постройте графики  $x(t), y(t)$  и кривую  $x = x(t), y = y(t)$ .

3. При помощи пакета Neural Network Toolbox создайте модель ИНС, аппроксимирующую функцию

$$z(x, y) = 1 - x^2 - 2y^2 + \ln(1 + (x + y)^{20})$$

при  $x \in [-8; 8], y \in [-8; 8]$ . Постройте график функции, проверьте качество аппроксимации.

4. Создайте Simulink-модель системы с дискретным временем

$$\begin{cases} x_{n+1} = -0.5y_n \\ y_{n+1} = x_n - ay_n. \end{cases}$$

Произведите численное моделирование при различных значениях параметра  $a$  и начальных условиях, выведите результаты моделирования в графическом представлении.

5. Используя средства пакета Optimization Toolbox, составьте программу для решения задачи минимизации функции  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$  при условии

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \wedge x_1 - x_3 = 2.$$

6. Создайте Simulink-модель системы

$$\ddot{x} + 8\dot{x} = |x| - 1.$$

Произведите численное моделирование при различных начальных условиях, постройте интегральные кривые в фазовом пространстве и графики  $x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)$ .

7. При помощи среды MATLAB составьте программу для решения задач Коши для системы

$$\begin{cases} \ddot{x} + \sin x = y - x \\ \ddot{y} + \sin y = x - y \end{cases}$$

с разными начальными условиями. Постройте графики  $x(t), y(t)$  и кривую  $x = x(t), y = y(t)$ .

8. Определите зависимость, связывающую величины  $x$  и  $y$ , по результатам измерений:

$x$	0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5
$y$	0	0.005	0.02	0.05	0.11	0.25	0.44	0.74	1.11

9. Используя средства пакета Optimization Toolbox, составьте программу для решения задачи минимизации функции  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  при условии

$$1 \leq x_1 \leq 3 \wedge x_1 \leq x_2 \leq 3 \wedge (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 1.$$

10. Известно, что решение задачи Коши для однородной линейной системы ДУ с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t_0) = x_0, \quad x, x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad A \in M_n(\mathbb{R}) \quad (1)$$

имеет вид

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0.$$

Используя этот факт, напишите программу для численного решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = y - z \\ \dot{y} = -2x - 2y + 2z \\ \dot{z} = -2x \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1, \quad z(0) = 0.$$

Постройте графики  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ .

11. Известно, что решение задачи Коши для неоднородной системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax + f(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x, x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad A \in M_n(\mathbb{R}) \quad (2)$$

можно записать в виде

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}f(\tau) d\tau.$$

Используя этот факт, напишите программу для численного решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = y - z \\ \dot{y} = -2x - 2y + 2z \\ \dot{z} = -2x + \sin^2 t \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1, \quad z(0) = 0.$$

Постройте графики  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ .

12. С помощью метода наименьших квадратов определите параметры  $a$ ,  $b$ ,  $c$  зависимости, связывающей величины  $x$  и  $y$ , по результатам измерений:

$x$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5
$y$	1.3	1.29	1.07	0.75	0.14	-0.71	-1.86	-3.45

если известно, что зависимость имеет вид  $y = a + bx + ce^x$ . Изобразите зависимость вместе с исходными точками на графике.

13. Создайте Simulink-модель системы

$$\ddot{x} = -\sin x + y, \quad \ddot{y} = -\operatorname{sgn} y.$$

Произведите численное моделирование при различных начальных условиях, постройте графики  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$ .

14. При помощи пакета Neural Network Toolbox создайте и обучите модель ИНС, разделяющую все точки трёхмерного пространства на два класса: точки, принадлежащие шару единичного радиуса с центром в начале координат, и не принадлежащие шару. Проверьте качество обучения.

15. Состояние  $x$  трёхмерной линейной системы с дискретным временем  $x^{n+1} = Bx^n$  менялось во времени (приблизительно) следующим образом:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_1^n$	0.722	2.948	2.497	1.089	2.078	1.525	1.057	1.405
$x_2^n$	2.586	1.027	-0.151	1.531	0.479	0.316	0.887	0.3
$x_3^n$	-0.667	1.607	-0.281	0.06	0.74	-0.133	0.238	0.326

Найдите матрицу  $B$  с помощью а) метода наименьших квадратов; б) ИНС.

16. При помощи среды MATLAB составьте программу, решающую задачу Коши для уравнения

$$\ddot{y} = 1000(1 - y^2)\dot{y} - y$$

с разными начальными условиями. Постройте графики  $y(t)$ ,  $\dot{y}(t)$  и кривую  $y = y(t)$ ,  $\dot{y} = \dot{y}(t)$ .

17. С помощью средств, предоставляемых MATLAB, найдите численно то решение ДУ  $\ddot{y} + y = 0$ , которое удовлетворяет условиям  $y(0) = 1$ ,  $y(\pi/2) = -1$ .

18. Используя средства пакета Optimization Toolbox, составьте программу для приближённого решения

а) задачи о наименьшей поверхности вращения (найти такую функцию  $y(x)$ ,  $y(a) = y_a$ ,  $y(b) = y_b$ , что  $\int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx \rightarrow \min$ );

б) задачи о брахистохроне (см. Википедию).