Преобразование Лапласа

Умножение изображений:

$$f(x)g(0) + \int\limits_0^x f(x-\tau)g'(\tau)\,d\tau = sF(s)G(s)$$

Изображение интеграла:

$$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^x f(t)\,dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Дифференцирование и интегрирование изображения:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -xf(x)$$

Обратное преобразование Лапласа от интеграла изображения:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int\limits_s^{+\infty} F(s)\,ds\right\} = \frac{f(x)}{x}$$

Для решения дифференциальных уравнений при помощи преобразования Лапласа важны свойства:

$$\mathcal{L}(y')(s) = sY(s) - y(0+)$$
$$\mathcal{L}(y'')(s) = s^2Y(s) - sy(0+) - y'(0+)$$

и т.д.

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}(x)\} = s^n \cdot F(s) - s^{n-1}y(0+) - s^{n-2}y^{(1)}(0+) - \ldots - sy^{(n-2)}(0+) - y^{(n-1)}(0+)$$

$f(x)$	$F(s)$
1	$1/s$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n/n!$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{1}{\omega}\sin\omega t$	$\frac{1}{s^2+\omega^2}$
$\frac{1}{\omega}\operatorname{sh}\omega t$	$\frac{1}{s^2-\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\operatorname{ch}\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$e^{-\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{-\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{s+\lambda}{(s+\lambda)^2+\omega^2}$

Решим задачу Коши:

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 3$$

$\lhd$

$$[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + 5[sY(s) - y(0)] + 6Y(s) = 0$$
$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) = 2s + 13$$

$$Y(s) = \frac{2s+13}{s^2+5s+6} = \frac{9}{s+2} - \frac{7}{s+3}$$

Ответ:

$$y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t} \ \rhd$$

Решим задачу Коши:

$$y'' + y = 2e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

$\lhd$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{s+1}$$
$$s^2Y(s) - s + 1 + Y(s) = \frac{2}{s+1}$$
$$Y(s)(s^2+1) = \frac{2}{s+1} + s - 1$$
$$Y(s)(s^2+1) = \frac{2+s^2-1}{s+1};$$

тогда $Y(s) = \dfrac{1}{s+1}$ и $y(t) = e^{-t}$. $\rhd$

Решим задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \sin t \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}, \quad x(0) = 1, \ \ y(0) = 0.$$

$\lhd$

$$sX(s) - x(0) = -Y(s) + \frac{1}{s^2+1}, \quad sY(s) - y(0) = X(s) - 2Y(s)$$
$$sX(s) - 1 = -Y(s) + \frac{1}{s^2+1}, \quad sY(s) = X(s) - 2Y(s)$$

Выражаем из второго уравнения $X(s) = Y(s)(s+2)$, подставляем в первое

$$Y(s)(s^2+2s) + Y(s) = 1 + \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s)(s^2+2s+1) = \frac{s^2+2}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{s^2+2}{(s^2+1)(s+1)^2}.$$

Теперь надо разложить дробь в сумму простых дробей:

$$\frac{s^2+2}{(s^2+1)(s+1)^2} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2},$$

$$(As+B)(s+1)^2 + C(s+1)(s^2+1) + D(s^2+1) = s^2+2.$$

Раскрыв скобки, получаем

$$A+C=0, \quad 2A+B+C+D=1, \quad A+2B+C=0, \quad B+C+D=2,$$

откуда $A=-\frac{1}{2}$, $B=0$, $C=\frac{1}{2}$, $D=\frac{3}{2}$, т.е.

$$Y(s) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(s+1)^2}.$$

По таблице и в силу свойства линейности находим

$$y(t) = -\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}te^{-t}.$$

Дальше надо снова раскладывать на простые дроби:

$$X(s) = Y(s)(s+2) = \frac{s^3+2s^2+2s+4}{(s^2+1)(s+1)^2} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{(s+1)^2},$$

но знаменатель тот же самый, поэтому часть работы уже сделана:

$$A+C=1, \quad 2A+B+C+D=2, \quad A+2B+C=2, \quad B+C+D=4,$$

что даёт нам $A=-1$, $B=\frac{1}{2}$, $C=2$, $D=\frac{3}{2}$, т.е.

$$x(t) = -\cos t + \frac{1}{2}\sin t + 2e^{-t} + \frac{3}{2}te^{-t}. \ \triangleright$$