1 Преобразование к квазиканоническому виду

Аффинную систему вида

$$\dot z_1 = z_2, \quad \ldots, \quad \dot z_{r-1} = z_r, \quad \dot z_r = f(z) + g(z)u, \quad \dot z_l = q_{l-r}(z),\ l = \overline{r+1, n} \tag{1}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in Z \subseteq \mathbb{R}^n$, $(q_1(z), \ldots, q_{n-r}(z))^T = q(z)$, $f(z), g(z), q(z) \in C^\infty(Z)$, называют *системой квазиканонического вида*, а переменные z — *квазиканоническими переменными.*

Введя фазовые переменные

$$y = z_1, \quad \dot y = z_2, \quad \ldots, \quad y^{(r-1)} = z_r,$$

можно записать (1) в виде

$$y^{(r)} = f(\overline{y}, \eta) + g(\overline{y}, \eta)u, \quad \dot\eta = q(\overline{y}, \eta), \tag{2}$$

где $\overline{y} = (y, \dot y, \ldots, y^{(r-1)})^T$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-r})^T = (z_{r+1}, \ldots, z_n)^T$.

Систему квазиканонического вида называют *регулярной* на некотором множестве, если в точках этого множества коэффициент при управлении не обращается в ноль.

Теорема 1. Для того, чтобы для аффинной системы

$$\dot x = A(x) + B(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

в Ω существовали переменные, в которых она имеет квазиканонический вид (1) необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$, которая в Ω является решением системы уравнений в частных производных

$$\mathbf{B}\mathbf{A}^k\varphi(x) = 0, \quad k = \overline{0, r-2} \tag{4}$$

и существовали такие функции $\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-r}(x) \in C^\infty(\Omega)$, удовлетворяющие уравнению в частных производных

$$\mathbf{B}\psi(x) = 0, \tag{5}$$

для которых соотношения

$$z_i = \mathbf{A}^{i-1}\varphi(x), \quad i = \overline{1, r}, \quad z_l = \psi_{l-r}(x), \quad l = \overline{r+1, n}, \tag{6}$$

задают в Ω гладкую невырожденную замену переменных $z = \Phi(x)$. В этих переменных аффинная система имеет квазиканонический вид (2), причем

$$f(z) = \mathbf{A}^r\varphi(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}, \quad g(z) = \mathbf{B}\mathbf{A}^{r-1}\varphi(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}, \quad q_l(z) = \mathbf{A}\psi_l(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)},\ l = \overline{1, n-r}, \tag{7}$$

где $x = \Phi^{-1}(z)$ обратная к (6) замена переменных.

Теорема 2. Для того, чтобы для аффинной системы (3) в Ω существовали переменные, в которых она имеет квазиканонический вид (1) необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $\varphi(x) \in C^\infty(\Omega)$, которая в Ω является решением системы уравнений в частных производных

$$\mathrm{ad}^k_{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}\varphi(x) = 0, \quad k = \overline{0, r-2} \tag{8}$$

и существовали такие функции $\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-r}(x) \in C^\infty(\Omega)$, удовлетворяющие уравнению в частных производных (5)

$$\mathbf{B}\psi(x) = 0,$$

для которых соотношения (6)

$$z_i = \mathbf{A}^{i-1}\varphi(x), \quad i = \overline{1, r}, \quad z_l = \psi_{l-r}(x), \quad l = \overline{r+1, n},$$

задают в Ω гладкую невырожденную замену переменных $z = \Phi(x)$. В этих переменных аффинная система имеет квазиканонический вид (2), причем выполнены соотношения (7)

$$f(z) = \mathbf{A}^r\varphi(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}, \quad g(z) = \mathbf{B}\mathbf{A}^{r-1}\varphi(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}, \quad q_l(z) = \mathbf{A}\psi_l(x)\Big|_{x=\Phi^{-1}(z)}, \ l = \overline{1, n-r},$$

где $x = \Phi^{-1}(z)$ обратная к (6) замена переменных.

Пример 1. Попытаемся привести систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + 2x_3 - u \\ \dot{x}_2 &= -x_3 + x_3\cos(x_1+x_2+x_3) + u \\ \dot{x}_3 &= -x_3\cos(x_1+x_2+x_3) \end{cases} \tag{9}$$

к квазиканоническому виду с $r = 2$. Получаем условия

$$\mathbf{B}\varphi(x) = 0, \qquad \mathbf{B}\psi(x) = 0,$$

то есть

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = 0, \quad -\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = 0,$$

следовательно, $\varphi(x) = F(x_1+x_2, x_3)$, $\psi(x) = P(x_1+x_2, x_3)$.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно выбрать по-разному с разным результатом. Например, если $\varphi(x) = x_1 + x_2$, $\psi(x) = x_3$, то

$$z_1 = \varphi(x) = x_1 + x_2, \;\; z_2 = \mathbf{A}\varphi(x) = x_2 + x_3 - x_3\cos(x_1+x_2+x_3), \;\; \eta = \psi = x_3;$$

обратная замена

$$x_1 = z_1 - z_2 + \eta - \eta\cos(z_1+\eta), \;\; x_2 = z_2 - \eta + \eta\cos(z_1+\eta), \;\; x_3 = \eta;$$

тогда $\dot{z}_1 = z_2$,

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 + \dot{x}_3 - \dot{x}_3\cos(x_1+x_2+x_3) + x_3\sin(x_1+x_2+x_3)(\dot{x}_1+\dot{x}_2+\dot{x}_3) =$$

$$= -x_3 + u - x_3\cos(x_1+x_2+x_3) + x_3\cos^2(x_1+x_2+x_3) + x_3\sin(x_1+x_2+x_3)(x_2+x_3) =$$
$$= -\eta - \eta\cos(z_1+\eta) + \eta\cos^2(z_1+\eta) + x_3\sin(z_1+\eta)(z_2+\eta\cos(z_1+\eta)) + u,$$
$$\dot{\eta} = -x_3\cos(x_1+x_2+x_3) = -\eta\cos(z_1+\eta).$$

Если выбрать $\varphi(x) = x_3$, $\psi(x) = x_1 + x_2$, то получим отображение

$$z_1 = x_3, \quad z_2 = \mathbf{A}\varphi(x) = -x_3\cos(x_1+x_2+x_3), \quad \eta = \psi(x) = x_1 + x_2,$$

которое не является гладкой невырожденной заменой переменных. Наилучшего результата можно добиться, выбрав $\varphi(x) = x_1 + x_2 + x_3$, $\psi(x) = x_3$:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\eta + u \\ \dot{\eta} &= -\cos z_1 \cdot \eta. \end{cases} \tag{10}$$

2 Стабилизация минимально фазовых аффинных систем

Будем предполагать, что аффинная система (3) , для которой $x = 0$ является положением равновесия, эквивалентна некоторой системе квазиканонического вида

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot z_1 & = & z_2 \\ & \dots & \\ \dot z_{r-1} & = & z_r \\ \dot z_r & = & f(z,\eta) + g(z,\eta)u \\ \dot\eta & = & q(z,\eta), \end{array}\right. \tag{11}$$

где $z = (z_1, \dots, z_r)^T$, $(q_1(z,\eta), \dots, q_{n-r}(z,\eta))^T = q(z,\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}^{n-r}$, $f(0,0) = 0$, $g(0,0) \neq 0$, $q(0,0) = 0$.

В этом случае систему уравнений

$$\dot\eta = q(0,\eta) \tag{12}$$

называют *системой уравнений нулевой динамики* или просто *нулевой динамикой.*

Пример 2. Уравнение нулевой динамики системы (10) имеет вид

$$\dot\eta = -\eta.$$

Состояние $\eta = 0$ системы уравнений нулевой динамики (12) является положением равновесия и если оно асиптотически устойчиво, то аффинную систему (3) называют *минимально фазовой* в точке $x = 0$, а если не асимптотически устойчивое — то *неминимально фазовой.*

Теорема 3. Нулевое положение равновесия системы

$$\begin{array}{l} \dot z = Pz, \quad z \in \mathbb{R}^r,\ P \in M_r\mathbb{R}, \\ \dot\eta = q(z,\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-r}, \quad q(0,0) = 0, \end{array} \tag{13}$$

где функция $q(z,\eta)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(z,\eta) = (0,0)$, асимптотически устойчиво, если линейная система

$$\dot z = Pz, \quad z \in \mathbb{R}^r, \tag{14}$$

асимптотически устойчива и асимптотически устойчиво положение равновесия $\eta = 0$ системы

$$\dot\eta = q(0,\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-r}. \tag{15}$$

◀Из асимптотической устойчивости линейной системы (14) следует, что решением стационарного уравнения Ляпунова

$$RP + P^T R = -E.$$

где E — единичная матрица, является симметрическая положительно определенная матрица R. Ей соответствует функция Ляпунова $V_0(z) = z^T Rz$ системы (14), производная которой в силу этой системы равна

$$\dot V_0(z) = z^T(P^T R + RP)z = -z^T z = -\|z\|^2.$$

Для системы (15) согласно теореме обращения в некоторой окрестности точки $\eta = 0$ существует непрерывно дифференцируемая положительно определенная функция $V_1(\eta)$ с отрицательно определенной производной $W_1(\eta) = \dot V_1(\eta)$ в этой окрестности.

Рассмотрим функцию

$$V(z,\eta) = V_1(\eta) + k\sqrt{V_0(z)} = V_1(\eta) + k\sqrt{z^T Rz}, \quad k = \text{const} > 0.$$

В окрестности нулевого положения равновесия системы (13) эта функция положительно определена, непрерывна, но непрерывно дифференцируема лишь в области $z \neq 0$.

Найдем ее производную в силу системы (13) в этой области

$$\dot V(z,\eta) = \frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta} q(z,\eta) - \frac{k}{2\sqrt{z^T R z}}\|z\|^2 =$$
$$= \frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta} q(0,\eta) + \frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta}(q(z,\eta) - q(0,\eta)) - \frac{k}{2\sqrt{z^T R z}}\|z\|^2 =$$
$$= W_1(\eta) + \frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta}(q(z,\eta) - q(0,\eta)) - \frac{k\|z\|^2}{2\sqrt{z^T R z}}.$$

Пусть $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ — наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы R, $0 < \lambda_{\min} \leq \lambda_{\max}$. Тогда

$$\lambda_{\min}\|z\|^2 \leq z^T R z \leq \lambda_{\max}\|z\|^2$$

и поэтому

$$\frac{k}{2\sqrt{\lambda_{\max}}}\|z\| \leq \frac{k\|z\|^2}{2\sqrt{z^T R z}} \leq \frac{k}{2\sqrt{\lambda_{\min}}}\|z\|.$$

Из этого двойного неравенства следует, что последнее слагаемое в производной $\dot V(z,\eta)$ доопределяется по непрерывности нулевым значением в точках с $z = 0$.

Сделав это, получаем непрерывную функцию $\dot V(z,\eta)$ в окрестности нулевого положения равновесия.

Поскольку функции $q(z,\eta)$ и $V_1(\eta)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности точки $(z,\eta) = (0,0)$, то в замыкании достаточно малой ограниченной окрестности этой точки справедливо неравенство

$$\frac{\partial V_1(\eta)}{\partial \eta}(q(z,\eta) - q(0,\eta)) \leq c\|z\|,$$

где $c = \mathrm{const}$. Это приводит к оценке производной $\dot V(z,\eta)$:

$$\dot V(z,\eta) \leq W_1(\eta) + c\|z\| - \frac{k}{2\sqrt{\lambda_{\max}}}\|z\|.$$

Следовательно, $\dot V(z,\eta)$ отрицательно определенная функция в некоторой окрестности точки $(z,\eta) = (0,0)$, если значение k выбрано в соответствии с неравенством

$$k > 2c\sqrt{\lambda_{\max}}.$$

Это означает, что $V(z,\eta)$ в этой окрестности есть функция Ляпунова системы (13) и согласно теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости нулевое положение равновесия этой системы асимптотически устойчиво. ▶

Из доказанной теоремы следует, что задача стабилизации нулевого состояния системы (11), а значит, и задача стабилизации положения равновесия $x = 0$ аффинной системы (3) для минимально фазового случая может быть решена при помощи управления

$$u(z) = \left(-f(z,\eta) - \sum_{i=1}^{\rho} p_{i-1} z_i\right) / g(z,\eta). \tag{16}$$

Замкнув систему (11) управлением (16), получим систему

$$\dot z = Pz, \quad \dot\eta = q(z,\eta), \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & \dots & -p_{\rho-1} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

нулевое положение которой асимптотически устойчиво, если постоянные p_i выбраны так, что линейная подсистема $\dot z = Pz$ асимптотически устойчива. Следовательно, записав управление (16) в переменных исходной аффинной системы (3), получим решение задачи стабилизации для исходной системы.

Пример 3. Стабилизирующее нулевое состояние системы (10) управление имеет вид

$$u = \eta - k_0 z_1 - k_1 z_2, \quad k_0 > 0, \quad k_1 > 0,$$

или, в исходных переменных,

$$u = x_3 - k_0(x_1 + x_2 + x_3) - k_1(x_2 + x_3).$$

Пример 4. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение перевёрнутого маятника на тележке:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \ddot x &=& \frac{1}{M+m\sin^2\theta}\Big(m\sin\theta(l\dot\theta^2 - g\cos\theta) + f\Big) \\ \ddot\theta &=& \frac{1}{l(M+m\sin^2\theta)}\Big(-ml\dot\theta^2\sin\theta\cos\theta + (M+m)g\sin\theta - f\cos\theta\Big). \end{array} \right. \tag{18}$$

Условие $\mathbf{B}\varphi = 0$ для этой системы примет вид

$$\frac{1}{M+m\sin^2\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot x} + \frac{-\cos\theta}{l(M+m\sin^2\theta)}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot\theta} = 0$$

или

$$l\frac{\partial\varphi}{\partial\dot x} - \cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\dot\theta} = 0.$$

Его независимые решения $\varphi_1 = \theta$, $\varphi_2 = x$, $\varphi_3 = l\dot\theta - \dot x\cos\theta$. Можно выбрать

$$z_1 = \theta, \quad z_2 = \dot\theta, \quad \eta_1 = x, \quad \eta_2 = l\dot\theta - \dot x\cos\theta;$$

эта замена невырождена при $|\theta| < \pi/2$ и имеет обратную

$$\theta = z_1, \quad \dot\theta = z_2, \quad x = \eta_1, \quad \dot x = \frac{lz_2 - \eta_2}{\cos z_1}.$$

тогда получим квазиканонический вид

$$\left\{ \begin{array}{lcllcl} \dot z_1 &=& z_2, & \dot z_2 &=& \dfrac{-mlz_2^2\sin z_1\cos z_1 + (M+m)g\sin z_1 - f\cos z_1}{l(M+m\sin^2 z_1)} \\ \dot\eta_1 &=& \dfrac{lz_2 - \eta_2}{\cos z_1}, & \dot\eta_2 &=& \left(g + \dfrac{lz_2 - \eta_2}{\cos z_1}\right)\sin z_1. \end{array} \right.$$

Этот квазиканонический вид регулярен при $|\theta| < \pi/2$, однако система нулевой динамики

$$\dot\eta_1 = -\eta_2, \quad \dot\eta_2 = 0$$

неустойчива, поэтому исходная система не является минимально фазовой.