1 Функции Ляпунова систем с управлением

Определение. Непрерывно дифференцируемую, положительно определенную, бесконечно большую при $|x| \to \infty$ функцию $V(x)$ называют *функцией Ляпунова системы с управлением*

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \;\; u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

если выполнено условие

$$\forall x \neq 0 \qquad \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \dot{V}(x) \equiv \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x, u) < 0. \tag{2}$$

Рассмотрим случай аффинных систем. Для этих систем условие (2) эквивалентно более простому требованию. В его формулировке в случае векторного управления удобно использовать следующие обозначения. Гладкой аффинной системе

$$\dot{x} = A(x) + \sum_{i=1}^{m} B_i(x) u_i, \quad A(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \; u = (u_1, \ldots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m, \tag{3}$$

взаимно однозначно соответствуют векторные поля $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_i$, $i = \overline{1, m}$. Обозначим через $\mathbf{B}$ блочную матрицу – строку $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_m)$ и по определению будем считать, что

$$\mathbf{B}V(x) = (\mathbf{B}_1 V(x), \ldots, \mathbf{B}_m V(x)).$$

Тогда для дифференцируемой функции $V(x)$ ее производная в силу аффинной системы (3) равна

$$\dot{V}(x) = \mathbf{A}V(x) + (\mathbf{B}V(x))u.$$

Теорема 1. (Критерий функции Ляпунова для аффинных систем) Для того, чтобы непрерывно дифференцируемая, положительно определенная, бесконечно большая при $|x| \to \infty$ функция $V(x)$ была функцией Ляпунова аффинной системы (3) необходимо и достаточно выполнения условия: если $\mathbf{B}V(x) = 0$ в точке $x \neq 0$, то в этой точке $\mathbf{A}V(x) < 0$.

◀ Пусть $V(x)$ — функция Ляпунова аффинной системы (3). Тогда согласно определению 1

$$\forall x \neq 0 \quad \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \dot{V}(x) = \mathbf{A}V(x) + \inf_{u \in \mathbb{R}^m} (\mathbf{B}V(x))u < 0$$

и поэтому, при $\mathbf{B}V(x) = 0$ получаем неравенство $\mathbf{A}V(x) < 0$, что доказывает необходимость выполнения условия теоремы.

Для доказательства достаточности предположим, что в любой точке $x \neq 0$, где $\mathbf{B}V(x) = 0$ выполнено неравенство $\mathbf{A}V(x) < 0$. Тогда в таких точках

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \dot{V}(x) = \mathbf{A}V(x) + (\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \mathbf{B}V(x))u = \mathbf{A}V(x) < 0.$$

В остальных точках $x \neq 0$ выполнено условие $\mathbf{B}V(x) \neq 0$. Пусть x одна из таких точек. Тогда в этой точке, например, $\mathbf{B}_1 V(x) \neq 0$. В этом случае существует такое $r \in \mathbb{R}$, для которого

$$\mathbf{A}V(x) + \mathbf{B}_1 V(x) r < 0.$$

Тогда при $u(r) = (r, 0, \ldots, 0)^T$ находим, что

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \dot{V}(x) \leq \dot{V}(x)|_{u=u(r)} = \mathbf{A}V(x) + \mathbf{B}_1 V(x) r < 0. \quad ▶$$

Оказывается, что если аффинная система имеет функцию Ляпунова $V(x)$, то с ее помощью можно задать такое непрерывное (при выполнении дополнительного условия) глобально стабилизирующее управление, при котором функция $V(x)$ будет функцией Ляпунова замкнутой системы.

Определение. Пусть $V(x)$ —функция Ляпунова аффинной системы (3).

Тогда функцию

$$\alpha_s(x) = \begin{cases} -\dfrac{\mathbf{A}V(x) + \sqrt{(\mathbf{A}V(x))^2 + |\mathbf{B}V(x)|^4}}{|\mathbf{B}V(x)|^2}(\mathbf{B}V(x))^T, & \mathbf{B}V(x) \neq 0 \\ 0, & \mathbf{B}V(x) = 0 \end{cases}$$

называют *функцией Зонтага*, а управление $u = \alpha_s(x)$ — *управлением Зонтага*.

Функция и управление Зонтага имеют следующие свойства.

Теорема 2. Если $V(x)$ гладкая функция Ляпунова аффинной системы (3), то функция $\alpha_s(x)$ является гладкой в области $x \neq 0$.

◀ Если в точке $\hat{x} \neq 0$ выполнено неравенство $\mathbf{B}V(\hat{x}) \neq 0$, то функция $\alpha_s(x)$ в окрестности этой точки совпадает с гладкой функцией

$$-\frac{\mathbf{A}V(x) + \sqrt{(\mathbf{A}V(x))^2 + |\mathbf{B}V(x)|^4}}{|\mathbf{B}V(x)|^2}(\mathbf{B}V(x))^T.$$

Если же $\mathbf{B}V(\hat{x}) = 0$ и $\hat{x} \neq 0$, то согласно теореме 1 $\mathbf{A}V(\hat{x}) < 0$ и поэтому $\mathbf{A}V(x) < 0$ в некоторой окрестности точки $\hat{x}$.

Следовательно, в этой окрестности

$$\mathbf{A}V(x) - \sqrt{(\mathbf{A}V(x))^2 + |\mathbf{B}V(x)|^4} < 0,$$

а функция $\alpha_s(x)$ совпадает с функцией

$$\frac{|\mathbf{B}V(x)|^2}{\mathbf{A}V(x) - \sqrt{(\mathbf{A}V(x))^2 + |\mathbf{B}V(x)|^4}}(\mathbf{B}V(x))^T,$$

которая является гладкой в рассматриваемой окрестности точки $\hat{x}$. ▶

Теорема 3. При $x \neq 0$ производная функции $V(x)$ в силу замкнутой системы

$$\dot{x} = A(x) + B(x)\alpha_s(x)$$

отрицательна.

◀ Если $\mathbf{B}V(x) = 0$ и $x \neq 0$, то $\dot{V}(x) = \mathbf{A}V(x) + (\mathbf{B}V(x))\alpha_s(x) = \mathbf{A}V(x) < 0$. Если же $\mathbf{B}V(x) \neq 0$, то

$$\dot{V}(x) = \mathbf{A}V(x) + (\mathbf{B}V(x))\alpha_s(x) = -\sqrt{(\mathbf{A}V(x))^2 + |\mathbf{B}V(x)|^4} < 0. \blacktriangleright$$

Определение. Говорят, что функция Ляпунова $V(x)$ системы с управлением $\dot{x} = f(x,u)$ удовлетворяет *свойству малых управлений*, если в окрестности нулевого положения равновесия существует непрерывное управление $u_c(x)$, $u_c(0) = 0$, при котором производная в силу замкнутой системы

$$\dot{V}(x)|_{u=u_c(x)} < 0, \quad x \neq 0.$$

Теорема 4. Для того, чтобы функция $\alpha_s(x)$ была непрерывна в точке $x = 0$ необходимо и достаточно, чтобы соответствующая функция Ляпунова $V(x)$ аффинной системы удовлетворяла свойству малых управлений.

◀ Необходимость условия следует из того, что по теореме 3 при $x \neq 0$ выполнено неравенство $\dot{V}(x)|_{u=\alpha_s(x)} < 0$ и если функция $\alpha_s(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, то функция Ляпунова $V(x)$ аффинной системы удовлетворяет свойству малых управлений.

Докажем достаточность. Пусть функция Ляпунова $V(x)$ аффинной системы удовлетворяет свойству малых управлений. Рассмотрим два случая.

1. Предположим, что в точке x выполнено неравенство $\mathbf{A}V(x) \geq 0$. Тогда из неравенства

$$\dot{V}(x)|_{u=u_c(x)} = \mathbf{A}V(x) + \mathbf{B}V(x)u_c(x) < 0,$$

следует, что

$$|\mathbf{A}V(x)| < |\mathbf{B}V(x)u_c(x)| \leq |\mathbf{B}V(x)| \cdot |u_c(x)|$$

и поэтому

$$|\alpha_s(x)| = \frac{|\mathbf{A}V(x) + \sqrt{(\mathbf{A}V(x))^2 + |\mathbf{B}V(x)|^4}|}{|\mathbf{B}V(x)|^2}|\mathbf{B}V(x)| =$$
$$= \frac{|\mathbf{A}V(x)| + \sqrt{|\mathbf{A}V(x)|^2 + |\mathbf{B}V(x)|^4}}{|\mathbf{B}V(x)|} \leq |u_c(x)| + \sqrt{|u_c(x)|^2 + |\mathbf{B}V(x)|^2}.$$

2. Предположим, что в точке x выполнено неравенство $\mathbf{A}V(x) < 0$. Тогда

$$0 \leq \mathbf{A}V(x) + \sqrt{(\mathbf{A}V(x))^2 + |\mathbf{B}V(x)|^4} \leq |\mathbf{B}V(x)|^2$$

и поэтому

$$|\alpha_s(x)| = \frac{|\mathbf{A}V(x) + \sqrt{(\mathbf{A}V(x))^2 + |\mathbf{B}V(x)|^4}|}{|\mathbf{B}V(x)|^2}|\mathbf{B}V(x)| \leq |\mathbf{B}V(x)|.$$

Следовательно,

$$|\alpha_s(x)| \leq \max\{|u_c(x)| + \sqrt{|u_c(x)|^2 + |\mathbf{B}V(x)|^2},\ |\mathbf{B}V(x)|\} \to 0 \text{ при } x \to 0,$$

поскольку функции $|u_c(x)|$ и $|\mathbf{B}V(x)|$ непрерывны и равны нулю в точке $x = 0$. ▶

В итоге получаем следующее утверждение.

Теорема 5. Если существовует гладкая функция Ляпунова аффинной системы (3), удовлетворяющая свойству малых управлений, то соответствующее ей управление Зонтага глобально стабилизирует нулевое положение равновесия.

Пример 1. Для аффинной одномерной системы

$$\dot{x} = x^2 + xu$$

согласно теореме **??** функция $V(x) = 0,5x^2$ является функцией Ляпунова, так как $\mathbf{A}V(x) = x^3$, $\mathbf{B}V(x) = x^2$ и $\mathbf{B}V(x) = 0$ лишь в точке $x = 0$. Соответствующее управление Зонтага

$$u = -x - \sqrt{x^2 + x^4}$$

является гладкой функцией в области $x \neq 0$. Оно непрерывно в точке $x = 0$ и, следовательно, это управление глобально стабилизирует нулевое положение равновесия, а функция Ляпунова удовлетворяет свойству малых управлений. Отметим, что найденное управление Зонтага не дифференцируемо в точке $x = 0$.

Как правило, управления Зонтага не являются самыми простыми решениями задачи глобальной стабилизации. Например, для системы из примера 1 одним из решений задачи глобальной стабилизации является управление $u = -x - x^2$. Тем не менее, важно то, что для нулевого положения равновесия аффинной системы по известной функции Ляпунова этой системы, удовлетворяющей свойству малых управлений, всегда можно выписать одно из решений задачи глобальной стабилизации.