Управляемость и достижимость

1 Основные определения

Рассмотрим нелинейную систему с управлением

$$\dot{x} = F(x, u) \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

которая при фиксировании любого начального состояния $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и любого допустимого управления $u(t)$, $t \in T = [t_0, t_*]$ такова, что соответствующая задача Коши

$$\dot{x} = F(x, u(t)), \quad x(t_0) = x^0 \tag{2}$$

имеет и притом единственное решение $x = x(t)$, определенное при $t \in T$.

В качестве допустимых управлений будем рассматривать кусочно непрерывные при $t \in T$ функции $u(t)$, а ограничения на состояния системы зададим в виде

$$x \in D \subset \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

где D — множество допустимых состояний системы (1).

Состояние $x^* \in D$ системы (1), (3) называют *достижимым* из состояния $x^0 \in D$, если существует такой интервал времени $T = [t_0, t_*]$ и определенное на нем допустимое управление $u(t)$, что для решения $x(t)$ соответствующей задачи Коши (2) выполнены условия

- $x(t) \in D$ при всех $t \in T$;
- $x(t_*) = x^*$.

Далее для множества всех состояний системы (1), (3), достижимых из состояния $x^0 \in D$, используется обозначение $x^0[D]$.

Если все состояния $x^* \in D$ системы (1), (3) достижимым из состояния $x^0 \in D$, т.е. $x^0[D] = D$, то эту систему называют *управляемой из состояния* x^0.

Если система (1), (3) управляема из любого допустимого состояния, т.е. для любой точки $x^0 \in D$ выполнено равенство $x^0[D] = D$, то систему (1) называют *управляемой на множестве* D.

2 Структура фазовых пространств

Обозначим через $\mathcal{E}^n(T)$ множество тех функций из $C^{n-1}(T)$, которые на отрезке $T = [t_0,\, t_*]$ имеют кусочно непрерывную n-ю производную. Каждой такой функции соответствуют кусочно дифференцируемая вектор–функция

$$\overline{y} = \overline{h}(t), \quad \overline{h}(t) = \{h(t), \dot{h}(t), \ldots, h^{(n-1)}(t)\}, \quad t \in T$$

и кусочно гладкая кривая в фазовом пространстве

$$\mathbb{R}^n = \{\overline{y} :\ \overline{y} = (y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})\},$$

задаваемая параметрическими уравнениями

$$y^{(i)} = h^{(i)}(t), \quad t \in T, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Эту кривую будем называть *фазовым графиком функции* $h(t)$ и обозначать $j_h(T)$.

Кривая $j_h(T)$ соединяет начальную точку

$$\overline{h}(t_0) = (h(t_0), \dot{h}(t_0), \ldots, h^{(n-1)}(t_0)) \in \mathbb{R}^n$$

фазового графика функции $h(t)$ с его конечной точкой

$$\overline{h}(t_*) = (h(t_*), \dot{h}(t_*), \ldots, h^{(n-1)}(t_*)) \in \mathbb{R}^n.$$

Каждому значению $t = t' \in T$ соответствует точка $\overline{h}(t')$ на фазовом графике функции $h(t)$.

Рассмотрим в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ произвольное подмножество Y. Множество, состоящее из тех точек $\overline{y}^* \in Y$, для каждой из которых существуют отрезок времени T и функция $h(t) \in \mathcal{E}^n(T)$, фазовый график которой соединяет точку $\overline{y}^0$ с точкой $\overline{y}^*$ и содержится в множестве Y, называют *компонентой точки* $\overline{y}^0$ в множестве Y и обозначают через $\overline{y}^0(Y)$

Если для любой точки $\overline{y}^0 \in Y$ выполнено равенство $\overline{y}^0(Y) = Y$, т.е. любую точку $\overline{y}^0$ можно соединить в множестве Y с любой другой точкой множества Y фазовым графиком некоторой функции из $\mathcal{E}^n(T)$ с началом в точке $\overline{y}^0$, то множество Y называют *t–связным.*

Введенные понятия компоненты точки в множестве и t–связности множества фазового пространства позволяют установить условия достижимости и управляемости для системы канонического вида

$$y^{(n)} = f(\overline{y}) + g(\overline{y})u, \quad \overline{y} \in Y \subset \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Теорема 1. Если для системы (4) канонического вида состояние $\overline{y}^* \in Y$ достижимо из состояния $\overline{y}^0 \in Y$, то точка $\overline{y}^*$ принадлежит $\overline{y}^0(Y)$ — компоненте точки $\overline{y}^0$ в множестве Y, т.е. $\overline{y}^* \in y^0(Y)$.

Теорема 2. Если система (4) канонического вида управляема из состояния $\overline{y}^0 \in Y$, то $\overline{y}^0(Y) = Y$, т.е. компонента точки $\overline{y}^0$ в множестве Y совпадает с Y.

Теорема 3. Если система (4) канонического вида управляема на множестве Y, то это множество t–связно.

Теорема 4. Если точка $\overline{y}^*$ принадлежит $\overline{y}^0(Y)$ — компоненте точки $\overline{y}^0$ в множестве Y, а система (4) канонического вида регулярна на множестве Y, то состояние $\overline{y}^*$ системы (4) достижимо из состояния $\overline{y}^0$.

Теорема 5. Если $\overline{y}^0(Y) = Y$, где $\overline{y}^0(Y)$ — компонента точки $\overline{y}^0$ в множестве Y, а система (4) канонического вида регулярна на множестве Y, то она управляема из состояния $\overline{y}^0$.

Теорема 6. Если множество $Y \subset \mathbb{R}^n$ — t–связно, а система (4) канонического вида регулярна на множестве Y, то она управляема на этом множестве.

3 Фазовые графики функций на фазовой плоскости

Теорема 7. Для того, чтобы ориентированная кривая $\mathcal{L}$, соединяющая на фазовой плоскости точку A с точкой B, была фазовым графиком некоторой функции $h(t) \in \mathcal{E}^2(T)$, $T = [t_0, t_*]$ необходимо и достаточно выполнения следующих условий.

1. Кривая непрерывна и ее ориентация задает движение точки по ней из точки A в точку B, которое происходит в верхней (нижней) полуплоскости слева направо (справа налево).

2. Кривая имеет касательную во всех своих точках, за исключением конечного числа тех из них, в которых она имеет односторонние касательные. В точках пересечения с осью Oy кривая имеет вертикальные касательные. Вне точек оси Oy кривая не имеет (односторонних) вертикальных касательных.

3. Кривая точками $M_i(y_i, 0)$, $i = \overline{1, n-1}$ пересечения с осью Oy, которые пронумерованы в соответствии с ориентацией кривой,

$$A = M_0(y_0, \dot{y}_0) \prec M_1 \prec \cdots \prec M_{n-1} \prec M_n(y_n, \dot{y}_n) = B,$$

разбивается на дуги $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_{M_i M_{i+1}}$. Каждая дуга $\mathcal{L}_i$ в системе координат $Oy\dot{y}$ есть график некоторой функции $\dot{y} = \alpha_i(y) \in \mathcal{E}^1(\tau_i)$, где отрезок τ_i ограничен точками M_i и M_{i+1}.

4. Интегралы

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{d\xi}{\alpha_i(\xi)}, \quad i = \overline{0, n-1}$$

сходятся.