модель Лотки — Вольтерра

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & x(\alpha - \beta y) \\ \frac{dy}{dt} & = & -y(\gamma - \delta x) \end{array}\right. \tag{1}$$

Положение равновесия:

$$\hat{x} = \frac{\gamma}{\delta}, \hat{y} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}\frac{\delta x - \gamma}{\beta y - \alpha}$$

$$\frac{\beta y - \alpha}{y}\,dy + \frac{\delta x - \gamma}{x}\,dx = 0$$

$$\delta x - \gamma \ln x + \beta y - \alpha \ln y = C \tag{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y)$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \alpha - \beta y$$

$$y = -\frac{1}{\beta}\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\int\limits_0^T y(t)\,dt = -\frac{1}{\beta}\int\limits_0^T \frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt}\,dt + \int\limits_0^T \frac{\alpha}{\beta}\,dt = -\frac{1}{\beta}\int\limits_0^T \frac{d\ln x}{dt}\,dt + \int\limits_0^T \frac{\alpha}{\beta}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{\beta}\ln x(t)\Big|_0^T + \frac{\alpha}{\beta}\Big|_0^T = \frac{\alpha}{\beta}T.$$

Среднее значение за период не зависит от начальных условий:

$$\frac{1}{T}\int_0^T y(\tau)d\tau = \frac{\alpha}{\beta}.$$

ЗАДАНИЯ

1. Проинтегрировать систему (1) с разными начальными условиями. Изобразить графики решения и фазовые траектории.

2. Изобразить кривую (2). Изобразить на том же рисунке фазовые траектории системы (1). Сравнить.

3. С помощью свойства Events найти период нескольких решений.

4. Вычислить средние значения численности популяции хищников и жертв за период и сравнить с теоретически полученными значениями.